回転群とその表現

山 内 恭 彦 著

岩 波 書 店

序　　文

欧米の書物にもちょっと見当らない題目であるから，書肆の店頭で始めてこれを手にされた読者は一体どんな内容のものかと迷われるに違いない．よって先ずこれに対する疑問に答えて置くとしよう．

“この本は何が書いてあるのか？”“数学に群論という一部門があって，その群の一つに回転群というものがある．これは要するに一点のまわりの回転の全体を一まとめにして取扱ったものである．本書はその理論と，その表現，即ち回転群を一次変換で表わした（具体化した）ものの理論を書いたものである．”

“この本はわかりにくいか？”“否，使ってある数学は代数，微積分の初歩で，むずかしい数式はない．説明もかなり馬鹿丁寧だから，そうわかりにくいことはないと思う．”

“そんならこの本はやさしいか？”といわれると“然り”とは言い兼ねる．“何といっても今までになじみの少い新理論に接するのであるから，概念を呑込むだけにも多少の努力を要するであろう．”

“この本は面白いか？”“著者は面白いつもりでいるが，これは多分に主観の問題であるから，読まれた上でないと何とも言えない．”

“この本は役に立つか？”“今日までの所この理論の主な応用は量子力学に関するもので，特に原子理論の研究者には手放せない重宝な道具である．その他剛体の回転運動にも使い途がある．しかし一体数学の理論を直接応用の価値だけで評価しては不当である．数学自体としての面白味も翫賞して，その整美に打たれる余裕も欲しいものである．”

以上は 1947 年 11 月 20 日，終戦後の世情に対する不安と，学問の復興に対する希望の中で，Akademeia 書店から本書を出版するときの‘はしがき’の一部に，多少おどけた調子で書いた一節である．あまりに余裕を失っていた当

時の研究者に，少しでもゆったりとした気分を与えたいという念願と，数学というものをあまり堅苦しく考えずに味って頂きたいという気持から，内容もできるだけくだいて，多少の冗長，重複を厭わずに記してみた．その後10年，忘れられかけていた回転群の表現論も‘原子核’の問題で再び取り上げられ，これに関心を持つ研究者の数も増して来たので，前版の多くの誤りを正すと共に新しく発展した理論をつけ加えて，今回岩波書店から版を改めて刊行することとした．この方面の入門本としていくらかでもお役に立てば幸である．

改訂，増補については，杉浦光夫君に原稿を通読して頂いて，数学者としての見地から誤りの訂正ばかりでなく，色々有益な示教を与えられた．ただし現代数学にくらい著者が，その注意を十分に生かすことができなかったのは残念である．Racah 理論については有馬朗人君の助言を得た．また校正については堀江久君の援助による所が大で，著者が中国旅行中に出版が進められるのはひとえに同君の御蔭である．ここにこれらの諸君に対して深く感謝の意を表する．

1957年5月6日

東大物理教室にて

山 内 恭 彦

目　　次

文　献

E. Cartan, Leçons sur la Théorie des Spineurs, I. (Actualités scientifiques et industielles, 643), 1938, Hermann.

E. U. Condon and G. H. Shortley, Theory of Atomic Spectra, 1935, Cambridge.

B. L. van der Waerden, Gruppentheoretische Methoden in der Quantenmechanik, 1932, Springer.

H. Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik, 1931 (2te Aufl.), Hirzel.

E. T. Whittaker, Analytical Dynamics, 1917 (2nd ed.), Cambridge.

E. Wigner, Gruppentheorie und ihre Anwendungen auf die Quantenmechanik der Atomspektren, 1931, Vieweg & Sohn.

H. Boerner, Darstellungen von Gruppen, 1955, Springer.

犬井鉄郎，柳川禎章，群の表現論，1950，裳華房.

G. Racah, Theory of Complex Spectra II, Phys. Rev. **62** (1942), 438.

L. C. Biedenharn, J. M. Blatt and M. E. Rose, Some Properties of the Racah and Associated Coefficients, Rev. Mod. Phys. **24** (1952), 249.

山内恭彦，堀江久，回転群および対称群の応用，岩波講座現代応用数学，1958，岩波書店

記号表

$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \cdots\cdot$ ベクトル.

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots\cdot, \mathbf{e}_n$; $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots\cdot, \mathbf{u}_n$ ベクトル空間の基底.

$\mathbf{xy}$ スカラー積(ユークリッド空間における).

$(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 内積(ユニタリ空間における).

$\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 四元数の単位元.

$\mathbf{V}$ ベクトル空間. 下添字 n はその次元数, 上添字 r, c はそれぞれ実および複素空間を意味する.

$\mathbf{V}(\alpha)$ 固有値 α に対する固有空間.

$\mathbf{V}/\mathbf{V}'$ 部分空間 $\mathbf{V}'$ による $\mathbf{V}$ の商空間.

F 函数空間.

H ヒルベルト空間.

S 回転群 R のパラメタ空間.

K 二次元特殊ユニタリ群 SU_2 のパラメタ空間.

G, H, $\cdots\cdot$ 群.

N 不変部分群.

L 完全一次群, SL 特殊一次群.

O 直交群.

U ユニタリ群, SU 特殊ユニタリ群, 上下添字は $\mathbf{V}$ に対するものに同じ.

R 回転群, R' 広義回転群.

D 群の表現, $\mathsf{D}_j = \mathsf{D}(j)$ 回転群の $2j+1$ 次元既約表現.

C_p 二次元ユニタリ群の $p+1$ 次元既約表現.

E 単位行列, E_n n 次元単位行列.

U ユニタリ行列.

H エルミート行列.

det (A) 変換 A の行列式.

Sp (A) 変換 A の跡.

$R_1 = R_x$, $R_2 = R_y$, $R_3 = R_z$ x, y, z 軸のまわりの無限小回転演算子.

$J_x = iR_x$, $J_y = iR_y$, $J_z = iR_z$ 角運動ベクトルの成分.

$D_{mm'}(r)=D^j{}_{mm'}(r)=D(j, mm'; r)$　既約表現 D(j) のユニタリ表現行列.

$(j_1j_2m_1m_2|j_1j_2jm)=(m_1m_2|jm)$　Clebsch-Gordan 係数.

$W(abcd; ef)$　Racah 係数.

$(\alpha j\|T^{(k)}\|\alpha' j')$　k 階既約テンソルの物理的部分.

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$　Cayley-Klein のパラメタ.

$\kappa, \lambda, \mu, \nu$　Euler-Olinde-Rodrigues のパラメタ.

θ, φ, ψ　Euler の角.

ξ, η　スピノルの成分.

ω　回転角

Ω　パラメタ空間 **S** の体積.

$d\Omega_r$　点 r における **S** の体積要素.

$\rightarrow$　対応.

$\subset$　に含まれる.

$\in$　に属する.

A*　A の転置行列.

$\tilde{\mathrm{A}}$　A の転置共軛行列.

$\sim$　同値である.

$\cong$　共傾に変換される.

$\times$　ベクトル積，表現の積.

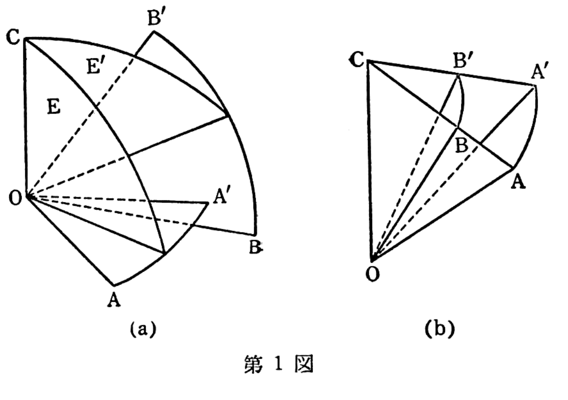
×　積空間に対するベクトルの積.

第1章　回転と回転群

§1. 回　　転

一点 O を固定した剛体の運動が，O を通る一つの直線のまわりの回転運動であることはわかりきったことのようであるが，例えば平面内の固定点 O のまわりの二次元回転では，点 O の外には不動な点がないから，三次元運動で一点を固定すると，一直線上の総べての点が動かないということは，そう自明であるともいえない．よってその証明を与えよう．もう少しはっきりいうと，剛体の中の一点 O が固定されているときには，剛体をその最初の位置 P から任意の位置 Q へもってくることが，O を通る一直線のまわりの回転で実現される' ということである．その証明として，一つは直観的幾何学的，もう一つは解析的の方法によるものの二種を与えよう．

第一の証明法は，Euler が与えたという古典的なもので，次のようなものである．Oを通る剛体に固定した二本の直線を考え，最初の位置 P におけるその位置を OA, OB，最後の位置 Q における位置を OA′, OB′ とする．平面 AOA′ に垂直で，角 AOA′ を二等分する平面 E と，平面 BOB′ に垂直で角 BOB′ を二



第 1 図

等分する平面 E′ との交りを OC とする(a). ただしこの二平面が一致するときは, 平面 OAB と OA′B′ との交りを OC とする (b). そうすれば OC の OA′, OB′ に対する関係と, OC の OA, OB に対する関係とは全く同じことであるから, 角 AOC, BOC はそれぞれ角 A′OC, B′OC に等しい. よって OABC を動かして OA, OB をそれぞれ OA′, OB′ に一致させるときに OC を不動に保つことができる. よって剛体の変位: P → Q は直線 OC のまわりの回転により実現される.

この証明は幾何学的直観に頼る所が多い. これをもう少しモダーンなものにするには次のような考え方がある. 剛体内に O を中心とする任意の半径の球, 例えば半径 1 の単位球を考えると, 中心 O を固定した運動により, この球面上の点はその球面の上で動く, 即ちこのような変位は球面をそれ自身に移すような運動である. そうすれば, 上記の定理はこのような運動において, 球面上の全部の点が動いて, 不動点が一つもないことが不可能であるということにいい直され, topology (位相幾何学) の定理らしい表現になる.

次に解析的の証明法を与えよう. この方はかなり長い証明になるが, ここに現われる諸種の概念, 方法は, 後述の理論の基礎になるものが少くないから, 十分に理解して頂きたい.

固定点 O を原点とする二組の座標系を考える. その一つは空間に固定したもの **F**: $Oxyz$ で, もう一つは剛体に固定した **M**: $Ox'y'z'$ である. **M** は剛体が動けば共に動いて, その方向が変わる. これを示すには, 次のような **F**, **M** の各座標軸の間の角の余弦の表が用いられる:

	x	y	z
x'	a_{11}	a_{12}	a_{13}
y'	a_{21}	a_{22}	a_{23}
z'	a_{31}	a_{32}	a_{33}

(1.1)

そうすると，よく知れた座標変換の関係により，同じ点 A の **M**, **F** に対する座標 (x', y', z'), (x, y, z) の間には，

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

の関係がある．かつ **M** は剛体について一緒に動くから，剛体に固定した点 P が空間において A 点から A′ 点へ移っても，その **M** に対する座標 (x', y, z') は一定である．

そこで最初の位置で **F**, **M** の座標が一致して取ってあったとし，点 A を占めている剛体の一点 P の座標を $x=x'$, $y=y'$, $z=z'$ とする．剛体が変位して，**M** が **F** に対して (1.1) で示されるような位置に来たとすれば，点 P は **F** に対して (1.2) の右辺で与えられるような点 A′ へ移る．その際原点 (0, 0, 0) は勿論不動であるが，それ以外に不動点があるとすれば，それは A′ と A との **F** に対する座標が等しいこと．即ち

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= x, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= y, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= z \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

なる方程式から定まる．これらを

$$\begin{aligned} (x_{11}-1)x + a_{12}y + a_{13}z &= 0, \\ a_{21}x + (a_{22}-1)y + a_{23}z &= 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + (a_{33}-1)z &= 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

のように書き直せば，これは x, y, z に対する同次の一次方程式であるから，その係数の行列式

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{11}-1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-1 \end{vmatrix} \tag{1.5}$$

が 0 でなければ，$x=y=z=0$ 以外には解がない．よって原点以外に不動点があるかないかは‘$\varDelta$ が 0 か否か’できまる．

この行列式 $\varDelta$ を展開すれば，

$$\varDelta = -1+(a_{11}+a_{22}+a_{33})-\left\{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\right\} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.6}$$

となる．ところで (1.1) の 9 個の余弦の表において，第1行（横に並んだ3個の数字）は x'，第2行は y'，第3行は z' 軸の方向余弦であるから，その間には，

$$\left.\begin{aligned} a_{11}{}^2+a_{12}{}^2+a_{13}{}^2=1, \\ a_{21}{}^2+a_{22}{}^2+a_{23}{}^2=1, \\ a_{31}{}^2+a_{32}{}^2+a_{33}{}^2=1 \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

の関係がある．また x', y', z' 軸が直交することから，

$$\left.\begin{aligned} a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+a_{13}a_{23}=0, \\ a_{21}a_{31}+a_{22}a_{32}+a_{23}a_{33}=0, \\ a_{31}a_{11}+a_{32}a_{12}+a_{33}a_{13}=0 \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

の関係式が成立つ．そこで行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

の二乗を行列式の掛け算の法則に従って作ってみると，(1.7), (1.8) の関係により，

$$D^2=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1$$

となり，$D=\pm 1$ なることがわかる．然るに **F** と **M** とが一致しているときには，$a_{11}=a_{22}=a_{33}=1$，ほかの $a_{ij}=0$ $(i, j=1, 2, 3;\ i\neq j)$ であるから，$D=+1$ である．それから座標軸の間の角を少しずつ変えていったときにも，D の値は連続的に変わるもので，突然 $+1$ から -1 に変わることはないから，一般に

$$D=1 \tag{1.9}$$

が成立つ．よって (1.6) 第1項と第4項とは相殺する．

次に (1.6) の第3項の三つの項

$$a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32},\quad a_{33}a_{11}-a_{31}a_{13},\quad a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

を考える．これらは $\mathbf{a}_1(a_{11}, a_{12}, a_{13})$，$\mathbf{a}_2(a_{21}, a_{22}, a_{23})$，$\mathbf{a}_3(a_{31}, a_{32}, a_{33})$ なる三つのベクトルから作った次の三つのベクトル積：$\mathbf{a}_2\times\mathbf{a}_3$，$\mathbf{a}_3\times\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2$ のそれぞれ x, y, z 成分になっている．然るに $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は，(1.7), (1.8) により，いずれも大きさが 1 で，かつ互に直交する x', y', z' 軸方向の単位ベクトルであるから，ベクトル積の定義により，

$$\mathbf{a}_2\times\mathbf{a}_3=\mathbf{a}_1,\quad \mathbf{a}_3\times\mathbf{a}_1=\mathbf{a}_2,\quad \mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2=\mathbf{a}_3$$

である．従って，その両辺の各成分も互に相等しいから，

$$a_{11}=a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32},\quad a_{22}=a_{33}a_{11}-a_{31}a_{13},\quad a_{33}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1.10}$$

よって (1.6) の第2項と第3項も相殺し，結局

$$\varDelta=0$$

を得る．このようにして方程式 (1.4) が $x=y=z=0$ 以外の解を持つ，即ち‘原点以外に不動点がある’ことがわかった．

そこでこのような不動点が集ってどんな図形を作っているかを知るためには，方程式 (1.4) を満足する点の集りがどんな図形であるかを知ればよい．$\varDelta=0$ であるから，この三つの方程式は独立でない．したがって，(a) この中の二つが独立であれば，その二つの方程式の定める二平面の交りの直線が不動である．(b) 独立の方程式がただ一つであれば，その表わす平面の上の点が総べて不動である．まず (b) の可能性を調べよう．

(1.4) の3個の方程式が結局ただ1個の方程式と同等であるためには，x, y, z の係数がそれぞれ比例しなければならない．例えば，

$$\frac{a_{11}-1}{a_{21}}=\frac{a_{12}}{a_{22}-1},\quad \frac{a_{22}-1}{a_{32}}=\frac{a_{33}}{a_{33}-1}.$$

これから，

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}-a_{11}-a_{22}+1=0,$$
$$a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}-a_{22}-a_{33}+1=0$$

が得られる．ここに (1.10) の関係を用いれば，

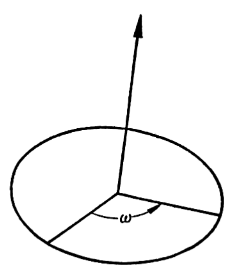
$$a_{33}-a_{11}-a_{22}+1=0,$$
$$a_{11}-a_{22}-a_{33}+1=0.$$

これを加えて，2 で割れば，

$$a_{22}=1$$

を得る．同様にして $a_{11}=1$，$a_{33}=1$ の関係が得られるから，(1.7) により，$a_{jk}=0$ (j, $k=1, 2, 3$, $j\neq k$)，従って，変換 (1.2) は $x'=x$，$y'=y$，$z'=z$ となり，どの点も最初の位置から動かないということになる．これは剛体がはじめから全然動かない場合である．この場合を除外すれば (b) の可能性はなくなって，(a) 即ち‘一直線が不動’の場合だけが残る．このようにして，‘固定点 O を有する剛体の運動においては，O を通る一直線が不動である’ことの証明ができた．この不動の直線を**回転軸**という．

そこで回転軸がきまった上では，剛体の変位はこの軸のまわりの**回転角** ω により定まる．ただし角 ω の回転は，角 $2\pi-\omega$ の逆向きの回転と同等であるから，‘変位に対して回転を一義的に定める’ためには，$0\leqq\omega\leqq\pi$ として置く必要がある．それでも $\omega=\pi$ のときには二義性を免かれない．ω が π より小さい角であるときには，回転軸にきまった向きを持たせることができる．それは回転の向きに右ネジを回したとき，ネジの進む



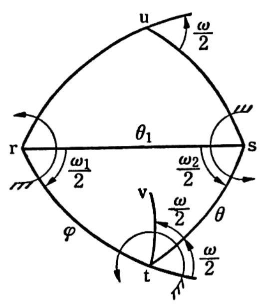
第 2 図

向きときめる．この（向きを含めた）回転軸の方向 α を*，その方向余弦 α_1, α_2, α_3 で示すことにすれば，回転は方向 $\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ および大きさ ω で定まる．これを回転 $r(\omega, \alpha) = r(\omega; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ と記すことにしよう．そうすれば r は回転軸の方向 α に長さ ω なる向きを持った線分で表わすことができる．というと，すぐにベクトルのことが思い浮べられるが，次節に示すように回転の合成はベクトル合成の規則に従わないから，回転はベクトル量ではない．

§2. 回転の合成，回転群

一点 O を固定した剛体が，回転 r により P なる位置から Q なる位置に移り，次にもう一つの回転 s により Q から R へ移ったとすれば，変位 P→R は O を固定した運動であるから，やはり一つの回転 t で実現されるはずである．即ち‘二つの回転 r, s を引続いて行った結果は一つの回転 t と同等である.’この場合に，回転 t を r と s とを**合成**した回転といい，これを $t=sr$ で表わす（合成の順序は右から左へ）．r, s の方向を $\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\beta(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, その回転角を ω_1, ω_2 としたとき，t の方向 $\gamma(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ 並びにその回転角 ω を求める方法は次の如くである．

O を中心とした半径 1 の単位球上に，α, β の方向に引いた半径の端を r, s とし，r と s とを大円の弧 $\widehat{\mathrm{rs}}$ で結ぶ．回転 r の向きと逆向きに $\omega_1/2$ の角をなす大円の弧 $\widehat{\mathrm{rt}}$，および回転 s の向きに $\omega_2/2$ の角をなす大円の弧 $\widehat{\mathrm{st}}$ を引き，その交点を t とすれば（球面上の大円だから交らないということはない），t が回転 t の方向 γ を与え，球面三角形 rst の t における外角が t の回転角の半分 $\omega/2$ を与える．



第 3 図

証明．r において弧 $\widehat{\mathrm{rs}}$ と回転の向きに $\omega_1/2$, s において回転の向きと逆に

---

* ここに α と記したのは方向，向きを示す‘記号’で，数ではない．すぐ後の回転 r と書いたのも同様である．

$\omega_2/2$ の角をなす大円の弧を引いて球面三角形 rsu を作れば，rst と rsu とは合同である，よって t は r のまわりの角 ω_1 の回転により u に移り，次に s のまわりの角 ω_2 の回転により再び t に戻る．結局 t は回転 $t=sr$ によって不動で，回転軸の方向を与える．かつ弧 $\widehat{\mathrm{tr}}$ は回転 r により $\widehat{\mathrm{ur}}$ に，次に s により $\widehat{\mathrm{ts}}$ と $\omega/2$ の角をなす $\widehat{\mathrm{tv}}$ に移るから，全体としての回転角は ω である（証明了）．

上記の作図で ω が π を超えたときには，反対方向の角 $2\pi-\omega$ とすることは前に断わった通りである．よって ω が π を超えると点 t は直径の反対側に飛び移る．

合成の順を逆にすれば，rs は u のまわりの角 ω の回転になり，回転角は同じであるが回転軸の方向は異なる．従って $\alpha=\beta$，即ち同一回転軸のまわりの合成を除いては，$sr\neq rs$ である．このことだけからでも，回転の合成はベクトル合成とは異なることがわかる．（ベクトル合成は合成の順序によらない．）

なお合成回転に対する ω および $\gamma(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ を ω_1,ω_2 ; $\alpha(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$\beta(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ の函数として解析的に表わすのには，次のようにすればよい．

三角形 rst が平面三角形であれば，$\omega=\omega_1+\omega_2$ となるが，球面三角形であるために，その間の関係は球面三角法の公式により，

$$\cos\frac{\omega}{2}=\cos\frac{\omega_1}{2}\cos\frac{\omega_2}{2}-\sin\frac{\omega_1}{2}\sin\frac{\omega_2}{2}\cos\theta_1 \tag{2.1}$$

となる．ただし θ_1 は角 $\widehat{\mathrm{rs}}$，従って

$$\cos\theta_1=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3$$

である．(2.1) によって回転角 ω が ω_1, α_1, α_2, α_3 ; ω_2, β_1, β_2, β_3 の函数として定まる．次にその方向をあらわすために $\theta=\widehat{\mathrm{st}}$, $\varphi=\widehat{\mathrm{rt}}$ とすれば，同じく球面三角法の公式により，

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{\omega_1}{2}&=\cos\frac{\omega_2}{2}\cos\frac{\omega}{2}+\sin\frac{\omega_2}{2}\sin\frac{\omega}{2}\cos\theta,\\ \cos\frac{\omega_2}{2}&=\cos\frac{\omega_1}{2}\cos\frac{\omega}{2}+\sin\frac{\omega_1}{2}\sin\frac{\omega}{2}\cos\varphi\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

の関係が成立つ．ここに

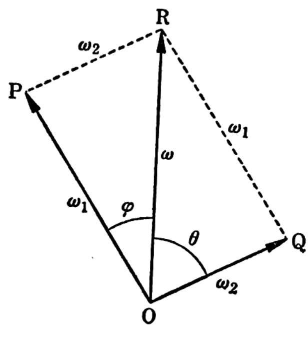
$$\cos\theta=\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3,\quad \cos\varphi=\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3$$

であるから，この二式から $\gamma_1:\gamma_2:\gamma_3$ が定まり，$\gamma_1{}^2+\gamma_2{}^2+\gamma_3{}^2=1$ と併せて，$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ を決定することができる．しかし，これらの合成を表わす式は余り簡単でない．もっと便利な回転の合成の解析的表現については後に述べることにしよう．

ここでついでに‘無限小回転’について一言附け加えておこう．回転角 ω_1, ω_2 を微小角とすれば，$z\ll 1$ に対する $\cos z=1-z^2/2$, $\sin z=z$ の近似式を用いて，(2.2) は

$$\omega_1{}^2=\omega_2{}^2+\omega^2-2\omega_2\omega\cos\theta,$$
$$\omega_2{}^2=\omega_1{}^2+\omega^2-2\omega_1\omega\cos\varphi$$

となる．微小回転 r, s, t を表わす線分 OP, OQ, OR を作ると，この関係は $\overline{\mathrm{QR}}=\omega_1$, $\overline{\mathrm{PR}}=\omega_2$ なることを示している．よって △OPR と △RQO とは合同である．ところで，第3図において $\omega_1\to 0$, $\omega_2\to 0$ とすれば点 t は大円弧 rs の上に近づくから，OPRQ は極限において同一平面上にある．従って $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ なるベクトルの加え算が成立つ．



第 4 図

無限小の回転というやや曖昧ないい方を避けるためには，微小回転を，微小時間 dt の間の剛体の回転と考え，回転角 ω の時間的変化の割合，即ち角速度によって表現すればよい．さらに都合がよいのは，(α, β, γ) の方向の，大きさ $o=d\omega/dt$ の角速度を，大きさ o, 方向 (α, β, γ) のベクトル $\mathbf{o}$ を以て表わすことである．そうすれば上記の無限小回転の合成は，‘剛体が同時に $\mathbf{o}_1$, $\mathbf{o}_2$ なる角速度を持って運動することは，

$$\mathbf{o}=\mathbf{o}_1+\mathbf{o}_2 \qquad (2.3)$$

なる角速度を持つことと同等である’といい直される．有限角の回転はベクトルでは表わされないが，その時間的変化を表わす角速度は，このように，ベクトルとして表現できるので，取扱いに便利なことがある．

ここで一つ一つの回転 r から，定点 O のまわりの総べての回転を総合して見る立場に移ろう．そうすると，二つの回転 r, s を合成したものがまた一つの回転 t になることから，固定点 O のまわりの回転の全部を取って来ると，それが群を作っていることがいえる．ここに**群**とは次の四つの性質を満足するもの(これを**元**と呼ぶ)の集り G をいう：

1.　集合 G の二つの元 a, b に対して，きまった一つの合成元 $c=ba$ を作る規則が与えられている．或いは，a, b が G に属するときには，その合成元 ba も G に属する．

2.　合成に際し結合則

$$c(ba)=(cb)a \tag{2.4}$$

が成立つ．

3.　任意の元 a に対し，

$$ea=ae=a \tag{2.5}$$

を満足する元 e が G の中にある．e を**単位元**という．

4.　任意の元 a に対し，

$$aa^{-1}=a^{-1}a=e \tag{2.6}$$

を満足する元 a^{-1} が G の中にある．a^{-1} を a の**逆元**という．

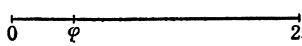
回転の集合 R につき上の性質を証明するのは簡単である．1. は既に記した通り．2. は次のように証明される．回転 r, s, t による剛体の変位を $r:\mathrm{Q}\to\mathrm{R}$, $s:\mathrm{R}\to\mathrm{S}$, $t:\mathrm{S}\to\mathrm{T}$ とすれば，$sr:\mathrm{Q}\to\mathrm{S}$, $ts:\mathrm{R}\to\mathrm{T}$. 故に $t(sr)=\mathrm{Q}\to\mathrm{S}\to\mathrm{T}$, $(ts)r:\mathrm{Q}\to\mathrm{R}\to\mathrm{T}$ であるから，$t(sr)$ も $(ts)r$ も結局同一の変位 $\mathrm{Q}\to\mathrm{T}$ を表わす．3. 単位元は回転角 0 の回転，即ち不動である．これを**恒等回転**と名付けよう．4. r の逆元 r^{-1} は r と同方向の回転角が同じで向きの反対な回転

である： $r=(\omega,\ \alpha)$ とすれば，$r^{-1}=(\omega,\ -\alpha)$．これを**逆回転**と呼ぶことにする．

固定点 O のまわりの総べての回転の集合より成る群 **R** を**回転群**と呼ぶ．既に注意したように，一般に回転は合成に際し交換法則が成立しない，$sr \neq rs$ である．このように交換法則の成り立たない群を一般に**非可換群**という，R は一種の非可換群である．

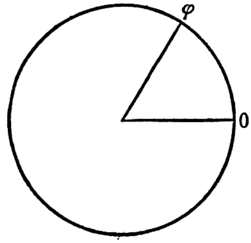
回転群 R の元の数は無限であるから，このような O のまわりのすべての回転の集合を表わすには幾何学的表現が便利である．しかし回転群に対するその表現にはややわかり難い点があるから，最初にまず簡単な別の例を挙げて説明しよう．

一つの固定直線，例えば z 軸のまわりの回転は一つの群を作っている．これは回転群 R の元の一部の集合である．このように群 G の元の一部のものが集って，G と同じ合成則に対して群 H を作っているとき，これを G の**部分群**と称する．z 軸のまわりの回転の集合は R の部分群で，**二次元回転群** $\mathbf{R}_2$ と呼ばれる．この群について著しいことは合成に際し，交換法則 $ba=ab$ が成立つことである．それは合成が回転角の加え算 $\varphi_1+\varphi_2$ に相当することから直にわかる．このような群を**可換群**または **Abel 群**という．二次元回転群 $\mathbf{R}_2$ においては，いつも z 軸のまわりの正の向きの回転を考えることにして，回転角 φ を 0 から 2π までの間に取る方が便利である．そうすれば各の元が連続的に変わる一つの回転角 φ で定まる．よって元の集合を表わすには，直線上の点を用いることがすぐ思い付く(第5図)．ただし，角 2π の回転は，角 0 の回転，即ち恒等回転と同等であるから，$\varphi=2\pi$ と $\varphi=0$ とは同じ元を表わす，即ち同一の点と考えなければならない．この不便を避けるためには，直線を曲げて 0 と 2π を一致させる，即ち φ を単位円上の点で表わせばよい(第6図)．そうすれば各の回転と単位円上の点とは一対一に対応する．即ち単



第 5 図

位円上の点により，$\mathbf{R}_2$ の元の全部が表わされることになる．このように群 $\mathbf{R}_2$ は単位円周上の点で表わされる一つのパラメタ φ で各の元が定まるので，**単パラメタ群**と称せられる．



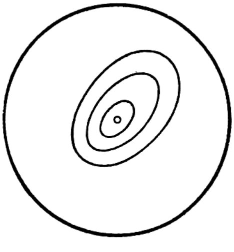
第6図

これに対して三次元回転群 $\mathbf{R}=\mathbf{R}_3$ は，前節に示したように，回転軸の方向 $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$ および回転角 ω で定まる．その間に $\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2+\alpha_3{}^2=1$ なる1個の関係があるから，独立なパラメタの数は3個である．この回転を表わす3個のパラメタとしては，例えば，前に記した，回転軸の方向 α の長さ ω なる線分の $x,\ y,\ z$ 軸への射影 $r_1=\omega\alpha_1,\ r_2=\omega\alpha_2,\ r_3=\omega\alpha_3$ を用いればよい．このように群のパラメタが，一般に n 次元ユークリッド空間の或る領域と一対一に対応し，かつ群元の積 sr および逆元 r^{-1} のパラメタが，それぞれ $r,\ s$ および r のパラメタの連続函数となるとき，この群を**連続群**という．（ただしパラメタは群全体に対して一組みであることを要しない．各点のまわりの或る範囲で定義されていればよい．）連続群の独立なパラメタの数を，その群の**次元数**という．従って‘回転群は三次元の連続群，或いは3パラメタ群である．’回転群の元 r と，座標が $(r_1,\ r_2,\ r_3)$ である三次元空間の一点 P とは（$\omega=\pi$ なる元を除き）一対一の対応をなすから，P により各の回転 r を代表させることができる．点 P の集合 S を回転群の**パラメタ空間**という．

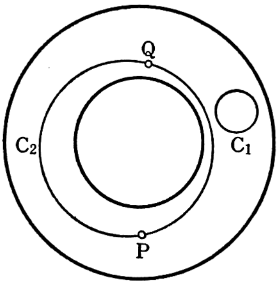
回転角 ω の値は π を超えないから，パラメタ空間 S は半径 π の球面の内部の点と，その表面の点より成る．ただし角 π の回転は同一回転軸のまわりの反対向きの π だけの回転と同じであるから，この球の直径の両端は同一の点と考えなければならない．これは丁度前の例で直線上の二点 0 と 2π とを同一点と考えなければならなかったのと同様である．前の場合には 0 と 2π とを一致させるうまい方法があったが，今度の場合には，あらゆる直径の両端を一致させて一つの空間を作ることは——三次元空間の中では少くとも——できない

相談であるから，そのままで考えるより仕方がない．球 S の表面は直径の向う側と続いているので，見掛けによらず，S には境界面はない．（三次元空間の曲面の例では球面のような性質である．）

このパラメタ空間について著しいことは，それが‘単連結でない’ことである．**単連結**というのは，この空間内に引いた任意の閉曲線がその空間から外へ出ることなしに，連続的変形によって一点に縮めることができることをいう．例えば球の内部は単連結である．これに対して浮き環，或いはドウナツのような円環体は単連結でない．事実第 7 図 (b) の図形で C_1 のような閉曲線は連続的変形で一点に収縮するが，C_2 のように環を一周りしている閉曲線は環から出なければ，どう縮めても，一点には縮まらない．単連結ということは，その中の二点 P, Q を結ぶ二つの曲線 C_1, C_2 が，連続的変形により，その空間から出ることなしに，一方から他方へ移り得るといっても同じことである．前の円環体中の二点 P, Q を結ぶ曲線が，左側をまわったものは右側をまわったものに連続的に移り得ないことは明かである．



(a)

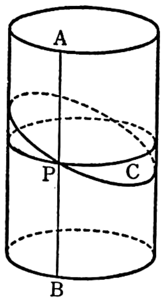


(b)

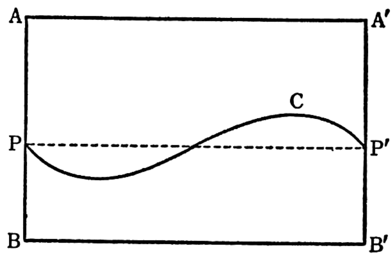
第 7 図

さて回転群のパラメタ空間が単連結でないことを示すのに，直径の両端が同一の点であるという直観的に捉え難い点があるので，くどいようであるが，こんな場合のわかりやすい例をもう一つ引き合いに出そう．それは，二次元の空間，即ち平面の一部で，円柱面を展開したものである．茶筒の上下をぶち抜い

たような円柱面を考えると，これを一まわりする曲線Cは，例えばゴム輪を引張ったものとしても，一点には縮まない，せいぜい軸に垂直な平面内の円になるに止まる．この円柱面を軸に平行な直線ABで切り放して平面に展げると第9図のようになる．この矩形で円柱面を考えるときには，AB，A′B′上の相対

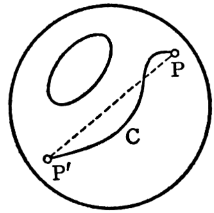


第8図



第9図

する点PとP′とは同一点である．従ってPとP′とを結ぶ曲線Cは，見かけにはよらず，閉曲線である．そこでCを動かしてこれを一点に縮めようとしてもPを動かせば同時にP′も動いてしまって，それは不可能である．このことはもとの円柱面に戻って考えれば至極わかり切った話である．

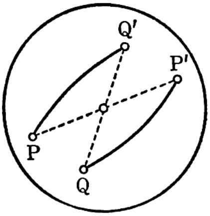


第10図

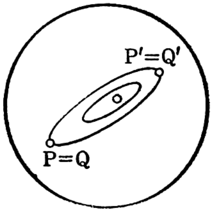
回転群 **R** のパラメタ空間 **S** における事情も全くこれと同様である．即ち球の内部にある閉曲線は，段々にこれをちぢめれば一点に収縮するが，直径の両端P，P′を通り，他の点は総べて球の内部にある閉曲線は，これをちぢめても，たかだかP，P′を通る直線になるだけで，一点には縮まらない．これから**S**が単連結でないことがわかる．

次に第11図のようにP，Q′＝Q，P′＝Pを連ねる閉曲線Cを考えると，P，Q従ってP′，Q′を連続的に動かして，PとQ従ってP′とQ′とを一致させれば，Cは第12図のようになり，これならば連続的に一点に縮めることができ

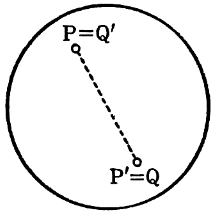
る．このことは第14図の例から会得されたい．或いはむしろ第13図のように P と Q′，P′ と Q とを一致させればなお簡単で，閉曲線は既に P＝P′ の一点に縮んでしまっている．更に第 15 図のように閉曲線が三回直径の端を通る場



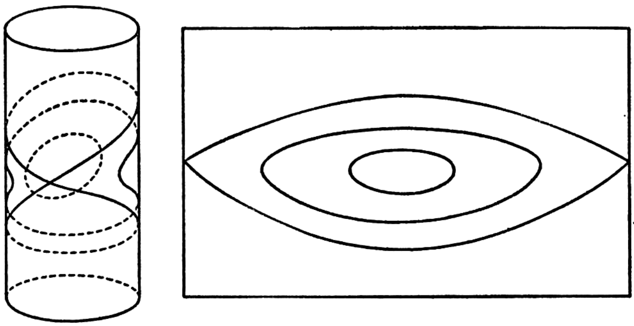
第 11 図



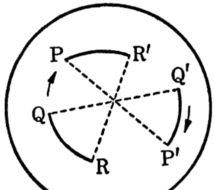
第 12 図



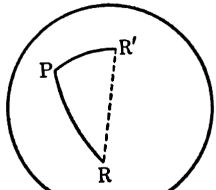
第 13 図


第 14 図

合には，Q→P，従って Q′→P′ なる変形により第 16 図のようになり，第10図の場合に帰着する．このように考えて行くとこの空間 **S** における閉曲線を二組に分けて，(1) 全然球面と交らないか，または偶数回交わるものと，(2) 奇数回交わるものとに類別することができる．



第 15 図

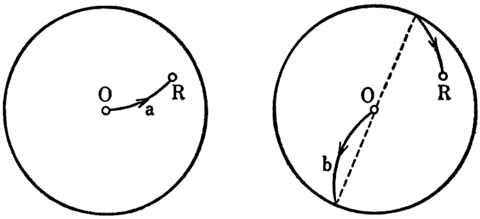


第 16 図

(1) の組のものは連続的変形により一点に縮まるが，(2) の組のものは一点には縮まらないで，球の直径に連続的に変形される．

このことは，パラメタ空間において単位元を表わす球の中心 O から出発し

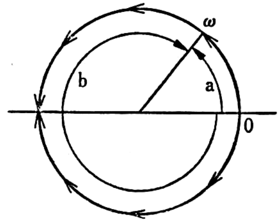
て，任意の元 r を表わす点 R に達するのに二種類の道（第 17 図 a, b）があって，一方は他方へ連続的変形によって移り得ないといい換えることができる．このことは後に述べる‘表現の多価性’に重要な関係がある．



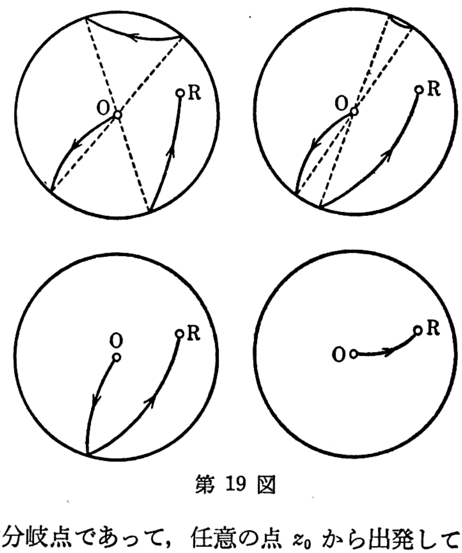
(a)　　　　　　(b)

第 17 図

その意味をもう少し丁寧に説明すると，恒等回転 e から任意の $r=(\omega, \alpha)$ なる回転に至るまでの間の回転の連続的な系列に二種あることである．その一つは，例えば α 方向に回転角が 0 から順次増加して ω になるもの，他の一つは，例えば $-\alpha$ 方向に回転角が 0 から π まで増して，引き続き α 方向で回転角が π から ω まで減っている系列をたどるものである．要するに回転軸のまわりの左回りと右回りの二つの系列である．この二つは，途中で回転軸の方向を連続的に変えても，連続的に一方から他方へは移れない．これに反して，第19図のような場合には，一方から他方へ連続的に移れる．



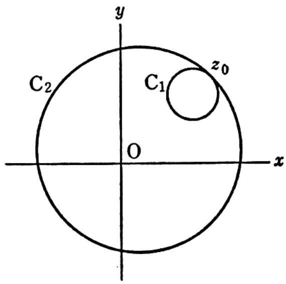
第 18 図



第 19 図

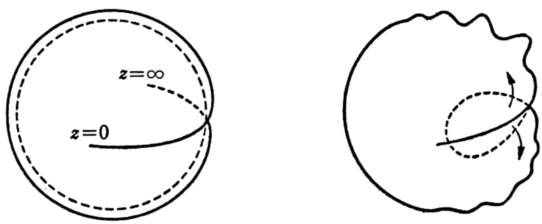
回転群のパラメタ空間のように，単連結でない空間の例は複素函数 $w=z^{1/2}$ に対する z 平面である．この場合には原点 $z=0$ は分岐点であって，任意の点 z_0 から出発して

再び z_0 に戻る閉曲線 C は，原点をまわらないもの C_1 は一点に縮まるが，原点を一周したもの C_2 はこれを縮めることができない．これが $z^{1/2}$ の二価性のもとである．この場合 z 平面と w 平面との対応を一対一にするためには，よく知れた Riemann 面が用いられる．w は二葉の Riemann 面の上の点の一価函数である．Riemann 面が単連結であることは次のようにして示される．



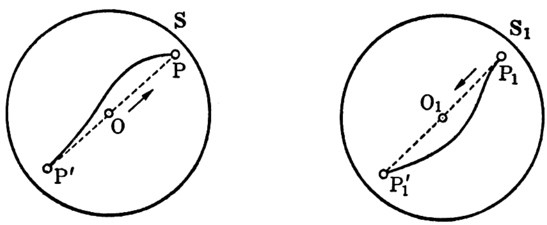
第 20 図

よく知れたように，立体射影（§3 参照）により，複素平面は球面上の点と連続的な一対一の対応がつくから，Riemann 面の代りに‘Riemann 球面’を考えてもその連続性に関することは同じである．二葉の面の接続線は $z=0$ と，$z=\infty$ に対応する直径の両端を通る大円弧である．この大円に沿うて，下の面を上へ引きずり出す（第 21 図）．そして下の面を全部引きずり出して見れば，皺だらけになって，空気の抜けたゴム風船のようなものになるが，これに空気を吹き込めば，ピンと張って球面状になる．球面が単連結であることは改めて申すまでもあるまい．



第 21 図

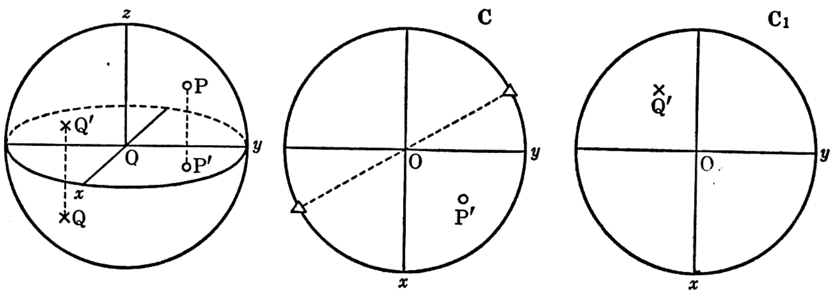
そこで回転群のパラメタ空間に対しても‘Riemann 空間’式のものを考えて，単連結なものを作ることができる．それには球 S の外に，同じ大



第 22 図

きさのもう一つの球 S_1 を考え，S の上の P が，S_1 の上の同じ座標の点 P_1 とつながっているときめる．この二つの球 S, S_1 を重ねたものを一つの空間 Σ と考えるのである．そうすれば P を通る直径の他の端 P′ は S_1 における P_1 の対蹠点 P_1' につながり，P と P′ とは Σ では異なる点である．そして $PP'P_1'P_1$ が一つの閉曲線になる．これを一つの点に縮めるのは簡単である．今度は $P_1=P$ と $P_1'=P'$ とは異なる点であるから，これらを球面上で動かして一致させてしまえば，それで終りである．

S と S_1 とが球面の上でつながっていることは，三次元の場合には少々理解しにくいかもしれないから，二次元の模型を与えよう．原点 O を中心とする単位球面上の点を，その x, y 座標で示す：$z=\pm\sqrt{1-x^2-y^2}$ とすれば，球面上の点を xy 面（赤道面）の単位円内の点で表わせる．ただしそのためには，赤道上，即ち円周上の点を除き，z の±，北半球と南半球とを表わす二枚の円 C, C_1 がいり用である（実際の地図では，このような平行射影を用いることは少いが，地球全体を表わす地図にはいつも二つの円がいることはよく御承知の



(a)　　　　(b)　　　　(c)

第 23 図

通りである）．この二枚を x, y 軸を一致させて重ねれば，その裏表の二面で球面全体の点を表わす二次元図形が得られる．これは球面を上下から押しつぶしたものであるから，位相的には球面と同等で，単連結である．二つの円をはり合わせて，その裏表がいえるのは，我々が三次元空間に生きているからである．

これから類推して，四次元空間で S, S_1 を球面上ではり合わせた二つの球の裏表と考えることは，そう困難でもなかろう．

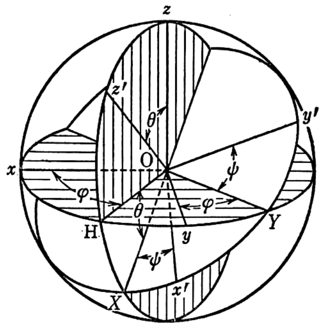
上の模型で回転群のパラメタ空間 S に相当するのは，C で直径の両端を同一のものとした閉曲面である．これは射影幾何で用いる射影平面と同位相であるが，このような閉曲面の模型は三次元空間には作れない．

元来空間 S が奇妙な性質をもったのは，回転角 ω が π を超えないと制限したため，'変位' としては連続な回転が，パラメタ (r_1, r_2, r_3) に対しては $\omega=\pi$ で不連続になったためである．S_1 を導入することにより，ω を π を超えて 2π まで連続的に変えることができるようになったため，この不連続性はなくなった．($\omega=2\pi$ では方向 α によらず，恒等回転，パラメタ空間では原点 O へ戻る．これは丁度，北極から出発した子午線が総べて南極の一点に到達するのと同様である.) その代りに同じ回転が S の上の ω と，S_1 の上の $2\pi-\omega$ の二つの点で表わされ，変位とパラメタ空間の点との対応が一対二となり，対応の一義性が失われる．(Riemann 面で，一つの z に対する w の二つの値が上下二葉で同一点であるようにするには，第22図において，S, S_1 の対応を $P \to P_1'$, $P' \to P_1$ とすればよい.)

§3. 回転の表現法

回転を表現するために，前節に用いた回転軸の方向 $\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ と回転角 ω，或いは $r_1=\omega\alpha_1$, $r_2=\omega\alpha_2$, $r_3=\omega\alpha_3$ の3個のパラメタを以ってすることは最も直接的であるが，問題の種類によっては必ずしも便利とはいえない．例えば二つの回転 ω_1; α_1, α_2, α_3 および ω_2; β_1, β_2, β_3 の合成則を表わす式は簡単でない．そこで回転を表わす色々の方法が案出されていて，場合場合に応じて便利に用いられる．これについては第3章以下で詳しく述べるが，ここでは簡単なものを二三挙げてみよう．その際いつも3個の独立なパラメタが必要なことは申すまでもないことである．

その一つは前に記した剛体に固定した座標系 **M**: $Ox'y'z'$ と空間に固定した座標系 **F**: $Oxyz$ との関係を 3 個の**角** θ, φ, ψ で示すもので **Euler の角**と称せられる．その定義は次の如くである．



第 24 図

固定座標系 $Oxyz$ に対する運動座標系 $Ox'y'z'$ の位置を指定するのに，まず z' 軸の方向を極角 θ, φ で定める．θ は z' の天項距離 $\left(\text{余緯度}=90^\circ\begin{cases}-\text{北緯度}\\+\text{南緯度}\end{cases}\right)$ 即ち z 軸と z' 軸との間の角，φ は方位角（経度，ただし東経，西経を区別しないで，一方向きに計る)，即ち z, z' を通る子午面が赤道において x 軸となす角 (zz' 面と zx 面との間の角) である．z' 軸がきまれば $x'y'$ 面はこれに垂直に定まるから，あとはその中で x' 軸の位置を指定すればよい．それには z, z' を通る子午面と，$x'y'$ 面との交わり OX と x' 軸との間の角 ψ が用いられる．これはまた，xy 面 (赤道面) と $x'y'$ 面との交わり OY と，y' 軸との間の角に等しい．このようにして三つの Euler の角 θ, φ, ψ により二つの座標系の相対位置が確定する．これは即ち，**F** から **M** への回転を z 軸のまわりの φ, OY のまわりの θ, z' 軸のまわりの ψ なる回転角の三つの回転の合成として表わしたものである．この三回の回転により x 軸は $Ox\to OH\to OX\to Ox'$, y 軸は $Oy\to OY\to OY\to Oy'$, z 軸は $Oz\to Oz\to Oz'\to Oz'$ なる移動を行う．二つの座標系の関係を (1.1) のように座標軸の間の角の余弦を表わせば次表のようになる．

	x	y	z
x'	$\cos\theta\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi$	$\cos\theta\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi$	$-\sin\theta\cos\psi$
y'	$-\cos\theta\cos\varphi\sin\psi-\sin\varphi\cos\psi$	$-\cos\theta\sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi$	$\sin\theta\sin\psi$
z'	$\sin\theta\cos\varphi$	$\sin\theta\sin\varphi$	$\cos\theta$

Euler の角を用いたときにも，θ_1, φ_1, ψ_1；θ_2, φ_2, ψ_2 で表わされる二つの

回転 r, s を合成した回転 t に対する θ, φ, ψ を θ_1, φ_1, ψ_1; θ_2, φ_2, ψ_2 の函数として表わすことは簡単でない．これを簡単に表わすには，むしろ座標の間の一次変換 (1.2) を用いた方がよい．これを‘回転を表わす一次変換 と呼称することにしよう．この表現は a_{ij} $(i, j=1, 2, 3)$ なる9個のパラメタを用いるもので，それらの間には (1.7), (1.8) の関係があるため独立なものは当然3個である．3個のパラメタで足りる所を9個も使うのは余計な感じがするが，そのため式の対称性を増して，反って便利な点もある．これらの点については次章で一般に一次変換を論ずる際に詳しく説明することにしよう．

最後にもう一つの方法を述べるに当って，§1 に述べたように回転が球面をそれ自身に移す変換であることを想い出して頂きたい．読者は複素函数論で原点を中心とする半径1の球面を，南極 S(0, 0, −1) から立体射影を行うことにより，赤道面平面 $x'y'$ と球面との間に（南極 S を除き），一対一の対応が成立することを御承知と思う．よって回転に伴う球面上の点の変位は複素平面上の点の間の変換で表わされるはずである．

複素平面上の点 $\zeta=x'+iy'$ と球面上の点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ との対応は次のようにして求められる．

P から z 軸へ下した垂線の脚を Q とすれば，

$$\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{O}\zeta}=\frac{\mathrm{QS}}{\mathrm{OS}}.$$

$$\overline{\mathrm{PQ}^2}=\overline{\mathrm{OP}^2}-\overline{\mathrm{OQ}^2}=1-z^2,$$

$$\mathrm{QS}=\mathrm{OS}+\mathrm{OQ}=1+z,$$

$$\mathrm{O}\zeta=\sqrt{x'^2+y'^2}=|\zeta|$$

であるから，

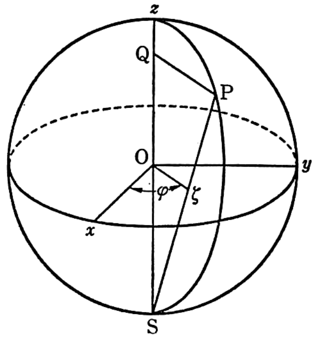
$$\frac{\sqrt{1-z^2}}{|\zeta|}=\frac{1+z}{1}.$$

これから

$$|\zeta|=\sqrt{\frac{1-z}{1+z}},$$

或いは

$$z=\frac{1-|\zeta|^2}{1+|\zeta|^2} \qquad (3.1)$$



第 25 図

が得られる．次に，角 $xO\zeta$ を φ とすれば，

$$x=\overline{\mathrm{QP}}\cos\varphi,$$

$$y=\overline{\mathrm{QP}}\sin\varphi,$$

$$\overline{\mathrm{QP}}=(1+z)|\zeta|$$

$$=\frac{2}{1+|\zeta|^2}|\zeta|,$$

$$|\zeta|\cos\varphi=x', \qquad |\zeta|\sin\varphi=y'$$

であるから，

$$x=\frac{2x'}{1+|\zeta|^2}, \qquad y=\frac{2y'}{1+|\zeta|^2}$$

或いは

$$x+iy=\frac{2\zeta}{1+|\zeta|^2}, \qquad x-iy=\frac{2\bar{\zeta}}{1+|\zeta|^2} \qquad (3.2)$$

を得る．ただし $\bar{\zeta}=x'-iy'$ は ζ の共軛複素数を表わす．更に1個の複素座標 ζ の代りに，$\zeta=\eta/\xi$ として2個の斉次座標 ξ, η を導入すれば，南極Ｓ自身も $\xi:\eta=0:1$ として含まれるから一層都合がよい．そうすれば，

$$x+iy : x-iy : z : 1 = 2\bar{\xi}\eta : 2\bar{\eta}\xi : \bar{\xi}\xi-\bar{\eta}\eta : \bar{\xi}\xi+\bar{\eta}\eta \qquad (3.3)$$

の関係が成立つ．そして，x, y, z に回転に相当する一次変換 (1.2) を施したとき，この二つの複素数 ξ, η が簡単な変換を行うならば，ξ, η の変換を以って回転を表わし得るわけである．このことも，もう少し一次変換に対する一般論を述べた上で説明した方が都合がよいから，これらの表現法に関することは暫くお預けとして，次に進もう．

第2章　一次変換

§4. ベクトル空間

二次元或いは三次元空間のベクトルについては，読者は既におなじみのことと思う．例の棒の先に矢印をつけたもので表わされる向きを持った線分のことである．このベクトルの概念をそのまま n 次元空間に拡張しようとしても，n 次元空間の線分というようなものは直観的表現が不可能であるから，具合が悪い．一方，三次元空間のベクトル $\mathbf{x}$ は解析的に表現することが可能である．即ち適当な座標系をとることにより，3個の成分 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ で示される．$\mathbf{x}$ と $(y_1,\ y_2,\ y_3)$ なる成分を持つベクトル $\mathbf{y}$ との和 $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ の成分は $(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3)$ であり，$\mathbf{x}$ の c 倍のベクトル $c\mathbf{x}=\mathbf{x}c$ の成分は $(cx_1,\ cx_2,\ cx_3)$ である．この成分を用いた表現法によれば，成分の数を増すことは簡単で全く形式的に行い得るから，n 次元空間のベクトルの定義を次のように与えることができる．n 次元空間のベクトル $\mathbf{x}$ は，一定の順序に並べられた n 個の数 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ で表わされる．$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ をそれぞれベクトル $\mathbf{x}$ の第1，第2，$\cdots$，第 n **成分**と呼ぶ．$\mathbf{y}$ を $(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)$ を成分とするもう一つのベクトルとしたとき，

$$\mathbf{x}=\mathbf{y}$$

は $x_1=y_1,\ x_2=y_2,\ \cdots,\ x_n=y_n$ なることを意味する．二つのベクトル $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ との和 $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ は

$$(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ \cdots,\ x_n+y_n) \tag{4.1}$$

で，$\mathbf{x}$ の c 倍 $c\mathbf{x}=\mathbf{x}c$ は

$$(cx_1,\ cx_2,\ \cdots,\ cx_n) \tag{4.2}$$

で定義される．

これによって二つのベクトルを加えること，および与えられたベクトルの何倍かのベクトルを作ることの演算が規定された．それは要するに各成分の加え算，並びにこれらに共通に数を掛けることであるから，普通の加え算，掛け算に対するのと同様な次の諸法則が成立つことが容易に証明される．

(a)　1.　$\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$　(交換法則)

2.　$(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$　(結合法則)

3.　$\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ を任意のベクトルとして，

$$\mathbf{x}=\mathbf{y}+\mathbf{z}$$

を満足するベクトル $\mathbf{z}$ が存在する．それは $(x_1-y_1,\ x_2-y_2,\ \cdots\cdots,\ x_n-y_n)$ なるベクトルである．これを $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ との差といい，$\mathbf{z}=\mathbf{x}-\mathbf{y}$ と記す (引き算の可能性)．

1. と 3. とから，任意のベクトル $\mathbf{x}$ に対し，

$$\mathbf{x}+0=0+\mathbf{x}=\mathbf{x}$$

を満足する‘ベクトル 0’の存在が知れる．これは $(0,\ 0,\ \cdots\cdots,\ 0)$ なるベクトルである．(数字の 0 と同じ文字を使うが，その意味のちがいに注意されたい．)

(b)　1.　$(a+b)\mathbf{x}=a\mathbf{x}+b\mathbf{x}$　(第一分配法則)

2.　$a(b\mathbf{x})=(ab)\mathbf{x}$　(結合法則)

3.　$a(\mathbf{x}+\mathbf{y})=a\mathbf{x}+a\mathbf{y}$　(第二分配法則)

4.　$1\mathbf{x}=\mathbf{x}$.

形式的な公理系のような述べ方をして，話が大分固苦しくなったが，それは要するにベクトル記号の加え算，並びにこれに数を掛けることが，普通の数に対するものと同様にやってよろしい，例えば順序を交換したり，括弧をほぐしても差支えないことを確めて置いたまでのことである*.

* 逆に，成分を用いた定義を使わずに，公理 (a), (b) からベクトル算を組み立てることができる．(例えば拙著‘代数学及び幾何学’(共立出版) §25 参照.) ただし次元数をきめるためには，もう一つの公理 (c)‘ベクトル空間 $\mathbf{V}$ の一次的独立なベクトルの最大数は n である’を付け加えることが必要である．

ここでベクトルの成分を表わす数 $x_1, \cdots, x_n$ にどういう制限があるかを反省してみよう．そうすると，それは普通の四則算法が，0 で割ることを除き，自由に行い得るもの（例えば有理数）であればよいことがわかる．普通のベクトルの成分を表わす実数は勿論これらの性質を持っているが，複素数も同様の性質を持っていることは御承知の通りである．よって，どうせ直観を或る程度犠牲にしてしまったついでに，以後数といえば‘一般に複素数を意味する’ものと約束しよう．そして特に実数を成分とするベクトルを**実ベクトル**，これを区別する必要があるときに，一般の複素数を成分とするものを**複素ベクトル**と呼ぶことにしよう．

次に個々のベクトルから，その集合 $\mathbf{V}$ に移る．ベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \cdots$ の集合 $\mathbf{V}$ が

1. ‘$\mathbf{x}$ が $\mathbf{V}$ に属するときには，任意の数 c に対し，$c\mathbf{x}$ も $\mathbf{V}$ に属する，’

2. ‘$\mathbf{x}, \mathbf{y}$ が $\mathbf{V}$ に属するときには，$\mathbf{x}+\mathbf{y}$ も $\mathbf{V}$ に属する’

という条件を満足するとき，$\mathbf{V}$ を**ベクトル空間**と呼ぶ．そして，$\mathbf{V}$ が実ベクトルのみより成るものを**実**（ベクトル）**空間**，複素ベクトルより成るものを**複素**（ベクトル）**空間**という．これを区別するときには $\mathbf{V}^r$, $\mathbf{V}^c$ と r, c を右肩につけて記す．以下特に断ってないときには $\mathbf{V}$ は一般に $\mathbf{V}^c$ を意味することにする．

矢印をつけた線分で表わされる普通の三次元空間のベクトルの全体をとれば明かに 1, 2 の条件を満足するから，これは一つのベクトル空間 $\mathbf{V}_3{}^r$ を作っている．右下の数字はその空間の次元数を表わす．平面上のベクトルの全体もまた同じようにベクトル空間 $\mathbf{V}_2{}^r$ を作っている．その際空間は三次元，平面は二次元というが，一体これらの空間の次元数は何で特徴付けられるかというのに，それは $\mathbf{V}_3{}^r$ では 3 個の独立なベクトルがあり，$\mathbf{V}_2{}^r$ では 2 個あることである．ただし直観を絶した n 次元空間に移るためには独立ということの定義をはっきりして置く必要がある．$\mathbf{V}_3{}^r$ の 3 個のベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ の間に，

$$a\mathbf{x}+b\mathbf{y}+c\mathbf{z}=0 \tag{4.3}$$

の関係が，悉くは 0 でない数 a, b, c に対して成立つときには，例えば $c \neq 0$ として，$a/c=-\alpha$，$b/c=-\beta$ と置けば，

$$\mathbf{z}=\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}$$

のように $\mathbf{z}$ は $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ のいわゆる**一次結合**として表わされる．この場合は，$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ の三つのベクトルは一次的に独立でないといわれる．逆に (4.3) を成り立たせる a, b, c が 0 以外にはないとき，$\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ は独立であるという．独立でない三つのベクトルは，同一平面，或いは一直線上にある，即ち次元数の低い空間に属する．これを一般化して，

'm 個のベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots\cdots, \mathbf{x}_m$ の間に，

$$a_1\mathbf{x}_1+a_2\mathbf{x}_2+\cdots\cdots+a_m\mathbf{x}_m=0 \tag{4.4}$$

の関係が，$a_1=0$，$a_2=0$，$\cdots\cdots$，$a_m=0$ 以外の数に対しては成り立たないとき，これらのベクトルは**一次的独立**であるという．' そこで n 次元ベクトル空間 $\mathbf{V}_n$ の**次元数**を次のように特徴付けることができる：

'$\mathbf{V}_n$ には n 個の一次的独立なベクトルが存在する．そして $\mathbf{V}_n$ に属する任意のベクトル $\mathbf{x}$ はこれらの n 個のベクトルの一次結合として表わされる．'

証明.

$$\left.\begin{array}{l}(1,\ 0,\ \cdots\cdots,\ 0)\\(0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ 0)\\\cdots\cdots\ \ \cdots\cdots\ \ \cdots\cdots\\(0,\ 0,\ \cdots\cdots,\ 1)\end{array}\right\} \tag{4.5}$$

なる成分を持った n 個のベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots\cdots, \mathbf{e}_n$ を考える．換言すれば $\mathbf{e}_i$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ は i 番目の成分だけが 1 で他の成分が全部 0 であるベクトルである．これらのベクトルは一次的独立である．何となれば，その間に一次的関係

$$a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+\cdots\cdots+a_n\mathbf{e}_n=0$$

が成立つとして，この両辺のベクトルの第1，第2，$\cdots\cdots$，第 n 番目の成分を取れば，順次

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad \cdots\cdot, \quad a_n = 0$$

を得るからである.

これらのベクトルに，それぞれ数 x_1, x_2, $\cdots\cdot$, x_n を掛けた，$x_1\mathbf{e}_1$, $x_2\mathbf{e}_2$, $\cdots\cdot$, $x_n\mathbf{e}_n$ なるベクトルの成分は $(x_1, 0, \cdots\cdot, 0)$, $(0, x_2, \cdots\cdot, 0)$, $\cdots\cdot$, $(0, 0, \cdots\cdot, x_n)$ であるから，その和は $(x_1, x_2, \cdots\cdot, x_n)$ となる. 即ち任意のベクトルは

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots\cdot + x_n\mathbf{e}_n \tag{4.6}$$

のように $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\cdots\cdot$, $\mathbf{e}_n$ の一次結合として表わすことができる (証明了).

これらのベクトル $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\cdots\cdot$, $\mathbf{e}_n$ は普通のベクトル算法で用いる座標軸方向の単位ベクトル $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ に相当する. これを空間 $\mathbf{V}_n$ の**基底**と呼ぶ.

普通の三次元ベクトルを一次結合として表わすベクトルは必ずしも $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ に限らない. 任意の一次的独立な, 即ち同一平面上にない 3 個のベクトル $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ (斜交軸の方向に，長さのちがった 3 個のベクトル，例えば斜交する結晶格子の，一つの格子点からこれに最も近い 3 個の格子点へ結ぶ三つのベクトル) を以って,

$$\mathbf{x} = \xi\mathbf{u} + \eta\mathbf{v} + \zeta\mathbf{w}$$

のように表わすことができる. これと同様 $\mathbf{V}_n$ においても，一次的に独立な n 個のベクトル $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\cdots\cdot$, $\mathbf{u}_n$ を用いて，任意のベクトルを,

$$\mathbf{x} = \xi_1\mathbf{u}_1 + \xi_2\mathbf{u}_2 + \cdots\cdot + \xi_n\mathbf{u}_n \tag{4.7}$$

のように表わし得ることが次のようにして示される.

$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\cdots\cdot$, $\mathbf{u}_n$ が独立であるから,

$$a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots\cdot + a_n\mathbf{u}_n = 0$$

を満足する a_1, a_2, $\cdots\cdot$, a_n は 0 以外にはない. $\mathbf{u}_k$ の成分を $(u_{k1}, u_{k2}, \cdots\cdot, u_{kn})$ として，上の式の第 1, 第 2, $\cdots\cdot$, 第 n 成分を書けば,

$$u_{11}a_1 + u_{21}a_2 + \cdots\cdot + u_{n1}a_n = 0,$$

$$u_{12}a_1 + u_{22}a_2 + \cdots\cdot + u_{n2}a_n = 0,$$

$$\cdots\cdot \quad \cdots\cdot \quad \cdots\cdot \quad \cdots\cdot \quad \cdots\cdot$$

$$u_{1n}a_1 + u_{2n}a_2 + \cdots\cdot + u_{nn}a_n = 0$$

となる．これを未知数 a_1, a_2, $\cdots\cdot$, a_n に対する連立方程式と見れば，この方程式が $a_1 = a_2 = \cdots\cdot = a_n = 0$ 以外に解を持たないことは

$$D = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{21} & \cdots\cdot & u_{n1} \\ u_{12} & u_{22} & \cdots\cdot & u_{n2} \\ \cdots\cdot & \cdots\cdot & \cdots\cdot & \\ u_{1n} & u_{2n} & \cdots\cdot & u_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (4.8)$$

の条件で表わされる．これが‘$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\cdots\cdot$, $\mathbf{u}_n$ が一次的独立であることを成分の間の関係で表わした条件である.’

そこで，

$$\mathbf{x} = \xi_1\mathbf{u}_1 + \xi_2\mathbf{u}_2 + \cdots\cdot + \xi_n\mathbf{u}_n$$

の各成分を書いて見ると，左辺と右辺を交換して，

$$u_{11}\xi_1 + u_{21}\xi_2 + \cdots\cdot + u_{n1}\xi_n = x_1,$$

$$u_{12}\xi_1 + u_{22}\xi_2 + \cdots\cdot + u_{n2}\xi_n = x_2,$$

$$\cdots\cdot \quad \cdots\cdot \quad \cdots\cdot \quad \cdots\cdot \quad \cdots\cdot$$

$$u_{1n}\xi_1 + u_{2n}\xi_2 + \cdots\cdot + u_{nn}\xi_n = x_n$$

となる．これを‘未知数’ξ_1, ξ_2, $\cdots\cdot$, ξ_n に対する連立一次方程式と見れば，その係数の行列式が 0 でない：$D \neq 0$ であるから，任意の x_1, x_2, $\cdots\cdot$, x_n に対して必ず一組の解がある．即ち任意の $\mathbf{x}$ に対して (4.7) を成立たせる ξ_1, ξ_2, $\cdots\cdot$, ξ_n が一義的に定まる．

このようにして，ベクトル $\mathbf{x}$ を一次結合として表わす基底は必ずしも (4.5) の n 個に限らない．n 個の一次的独立なベクトルであれば何でもよろしい，或いはベクトル空間 $\mathbf{V}_n$ は，これに属する n 個の独立なベクトル $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\cdots\cdot$, $\mathbf{u}_n$ を与えることにより定まることがわかった．これらを一般にベクトル空間 $\mathbf{V}_n$ の基底と呼ぶ．そして $\mathbf{V}_n$ は n 個のベクトル $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\cdots\cdot$, $\mathbf{u}_n$ により張ら

れるといい，$\mathbf{V}_n(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots\cdots, \mathbf{u}_n)$ のような記号によってこれを表わす．

$\mathbf{V}_n$ に属する $m \leqq n$ 個の独立なベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots\cdots, \mathbf{u}_m$ の作るベクトル空間 $\mathbf{V}_m$ を $\mathbf{V}_n$ の**部分空間**という．$\mathbf{V}$ に属する任意のベクトル $\mathbf{x}$ が二つの部分空間 $\mathbf{V}'$ と $\mathbf{V}''$ に属するベクトル $\mathbf{x}'$ と $\mathbf{x}''$ の和として一義的に表わされるとき，'空間 $\mathbf{V}$ は二つの部分空間 $\mathbf{V}'$ と $\mathbf{V}''$ とに分解される' といい，$\mathbf{V}=\mathbf{V}'+\mathbf{V}''$ と記す．この場合には $\mathbf{V}'$ の基底：$\mathbf{e}_1', \cdots\cdots, \mathbf{e}_{n'}'$ と，$\mathbf{V}''$ の基底：$\mathbf{e}_1'', \cdots\cdots, \mathbf{e}_{n''}''$ とが全空間 $\mathbf{V}$ の基底を作る．$\mathbf{V}', \mathbf{V}''$ の次元数 n', n'' の間には $n'+n''=n$ の関係がある．

§5. ベクトルの一次変換

ベクトル空間 $\mathbf{V}_n$ における各のベクトル $\mathbf{x}$ に対し，きまった方法でベクトル $\mathbf{x}'$ が対応するとき：$\mathbf{x}\to\mathbf{x}'$，これをベクトルの**変換**といい，一つの記号 A で表わす．対応 A：$\mathbf{x}\to\mathbf{x}'$ のことをまた $\mathbf{x}'=A\mathbf{x}$ とも記し，A を変換 A の**演算子**という．特にこの対応が

$$c\mathbf{x}\to c\mathbf{x}', \qquad \mathbf{x}+\mathbf{y}\to\mathbf{x}'+\mathbf{y}' \tag{5.1}$$

の条件を満たす，即ち $A(c\mathbf{x})=cA\mathbf{x}$, $A(\mathbf{x}+\mathbf{y})=A\mathbf{x}+A\mathbf{y}$ であるとき，これを**一次変換**という．一次変換 A により基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots\cdots, \mathbf{e}_n$ が $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \cdots\cdots, \mathbf{e}_n'$ に変わるものとすれば，$\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \cdots\cdots, \mathbf{e}_n'$ はやはりベクトル空間 $\mathbf{V}_n$ のベクトルであるから，$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots\cdots, \mathbf{e}_n$ の一次結合として

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1' &= a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + \cdots\cdots + a_{n1}\mathbf{e}_n,\\
\mathbf{e}_2' &= a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + \cdots\cdots + a_{n2}\mathbf{e}_n,\\
&\cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots\\
\mathbf{e}_n' &= a_{1n}\mathbf{e}_1 + a_{2n}\mathbf{e}_2 + \cdots\cdots + a_{nn}\mathbf{e}_n
\end{aligned}$$

のように表わされる．ところで，毎回のこのように沢山の式を並べて書くのは面倒でもあり，紙の不経済でもあるから，これをまとめて簡単に，

$$\mathbf{e}_k' = \sum_i \mathbf{e}_i a_{ik} \qquad (k=1, 2, \cdots\cdots, n) \tag{5.2}$$

と書き表わすことにする．a_{ik} を $\mathbf{e}_i$ の右側に書いたのは，別に大して意味のあることではないが，こうすると添字 i が続いて並ぶ便利がある．基底 $\mathbf{e}_i$ の変換則が知れると，これからベクトル成分の変換則が求められる．即ち (5.1) によれば，任意のベクトル

$$\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+\cdots\cdot+x_n\mathbf{e}_n=\sum_i x_i\mathbf{e}_i \tag{5.3}$$

は，変換 A により，

$$\mathbf{x}'=x_1\mathbf{e}_1'+x_2\mathbf{e}_2'+\cdots\cdot+x_n\mathbf{e}_n'=\sum_k x_k\mathbf{e}_k' \tag{5.4}$$

に変わる．これをもとの基底 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\cdots\cdot$, $\mathbf{e}_n$ で書いたものを

$$\mathbf{x}'=x_1'\mathbf{e}_1+x_2'\mathbf{e}_2+\cdots\cdot+x_n'\mathbf{e}_n=\sum_i x_i'\mathbf{e}_i \tag{5.5}$$

とすれば，(5.4) と (5.5) とは等しいから，(5.2) により，

$$\sum_i x_i'\mathbf{e}_i=\sum_k \mathbf{e}_k'x_k=\sum_{i,k}\mathbf{e}_i a_{ik}x_k.$$

よって

$$x_i'=\sum_k a_{ik}x_k \tag{5.6}$$

が始めの基底 $\mathbf{e}_i$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdot,\ n)$ を用いたときのベクトル $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ の‘成分の間の変換則’を与える．即ち‘ベクトルの一次変換 A はその成分の間の一次変換 (5.6) で表わされる.’ これを特徴付けるものは x_k の係数の表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdot & a_{2n} \\ \cdots\cdot & \cdots\cdot & \cdots\cdot & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdot & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

である．これを A の変換**行列**と呼ぶ．いい換えれば行列とは2個の添字を有する数記号 a_{ik} の集りである．その中前添字の一定なもの，即ち表 (5.7) で横に並んだ数列

$$a_{i1}\quad a_{i2}\quad \cdots\cdot\quad a_{in}\qquad\qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdot,\ n)$$

を**行**と呼び，$i=1,\ 2,\ \cdots\cdot,\ n$ に応じて，それぞれ第1行，第2行，$\cdots\cdot$，第 n 行と称する．これに対して後添字の一定なもの，即ち表 (5.7) で縦に並んだ数

列

$$a_{1k} \quad a_{2k} \quad \cdots\cdots \quad a_{nk} \qquad (k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

を**列**といい，左から順に第1列，第2列，$\cdots\cdots$ と数える．この行列を一つの記号 A で表わす*．（丁度ベクトル $(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n)$ を一つの記号 $\mathbf{x}$ で表わすように！）a_{ik} $(i,\ k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ を行列の**成分** ($i,\ k$ 成分)，或いは行列の要素，特に表 (5.7) において対角線上に配列された成分 $a_{11},\ a_{22},\ \cdots\cdots,\ a_{nn}$ を**対角成分**と称する．基底の間の変換：$\mathbf{e}_i'=\sum_k \mathbf{e}_k a_{ki}$ の $\mathbf{e}_k$ の係数行列と，ベクトル成分との間の変換 $x_i'=\sum_k a_{ik}x_k$ の x_k の係数行列とでは行と列とが逆になっている．‘変換行列’という際には‘成分の変換の行列’をいう．

次に一次変換の合成につき考えよう．一次変換 A により，$\mathbf{x}$ が $\mathbf{x}'$ に，B により $\mathbf{x}'$ が $\mathbf{x}''$ に変わったとすれば，$\mathbf{x}$ を直接 $\mathbf{x}''$ に変える変換 C も一つの一次変換である．（証明）$\mathrm{A}:\mathbf{x}\to\mathbf{x}',\ \mathbf{y}\to\mathbf{y}'$ とすれば，$c\mathbf{x}\to c\mathbf{x}'$，$\mathbf{x}+\mathbf{y}\to\mathbf{x}'+\mathbf{y}'$，$\mathrm{B}:\mathbf{x}'\to\mathbf{x}''$，$\mathbf{y}'\to\mathbf{y}''$ とすれば，$c\mathbf{x}'\to c\mathbf{x}''$，$\mathbf{x}'+\mathbf{y}'\to\mathbf{x}''+\mathbf{y}''$．従って $\mathrm{C}:\mathbf{x}\to\mathbf{x}''$，$\mathbf{y}\to\mathbf{y}''$ に対しても $c\mathbf{x}\to c\mathbf{x}''$，$\mathbf{x}+\mathbf{y}\to\mathbf{x}''+\mathbf{y}''$ が成立つ．この場合 C のことを A, B の**合成変換**，或いは A, B の**積**といい，$\mathrm{C}=\mathrm{BA}$ と記す（合成は右から左へ！）．この合成則が結合則

$$\mathrm{C(BA)}=\mathrm{(CB)A} \tag{5.8}$$

を満たすことは，$\mathrm{A}:\mathbf{x}\to\mathbf{x}'$，$\mathrm{B}:\mathbf{x}'\to\mathbf{x}''$，$\mathrm{C}:\mathbf{x}''\to\mathbf{x}'''$ とすれば，$\mathrm{BA}:\mathbf{x}\to\mathbf{x}''$，$\mathrm{CB}:\mathbf{x}'\to\mathbf{x}'''$，よって $\mathrm{C(BA)}:\mathbf{x}\to\mathbf{x}'''$，$\mathrm{(CB)A}:\mathbf{x}\to\mathbf{x}'''$ から直ちに証明される．

$\mathbf{x}$ に $\mathbf{x}$ 自身を対応させるような**恒等変換** $\mathrm{E}:\mathbf{x}\to\mathbf{x}$ に対し，

$$\mathrm{EA}=\mathrm{AE}=\mathrm{A}$$

なることは明かである．よって $\mathrm{A}:\mathbf{x}\to\mathbf{x}'$ に対し，$\mathrm{A}^{-1}\mathrm{A}=\mathrm{AA}^{-1}=\mathrm{E}$ を満足する**逆変換** $\mathrm{A}^{-1}:\mathbf{x}'\to\mathbf{x}$ が存在するならば，‘そのような一次変換の全体が

* A に対する演算子 A と同一記号であるが，行列は演算子をベクトル成分について具体化したものであるから強いて区別の要はあるまい．

群をなす’ことがいえる.

最後の条件，即ち逆変換が存在するか否かは，A をベクトル成分の間の一次変換で表わした式 (5.6) についていえば，この連立一次方程式が $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ について解けるかどうかで定まる．これが可能なためには‘未知数’ $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ の係数で作った行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{5.9}$$

が 0 でないことが必要かつ十分である．行列 A の行列成分で作った行列式 D を $\det(A)$ と記し，後述する理由で**変換 A の行列式**という．$\det(A)\neq 0$ なるような一次変換を**正常一次変換**，然らざるものを**異常一次変換**と称する．よって‘正常一次変換の集合は群を作る.’これを**完全一次群 L** と呼ぶ．特にベクトル空間の次元数を明示する必要があるときには L_n と記す．実空間における一次変換は n^2 個の行列成分 a_{ik} を座標とする n^2 次元ユークリッド空間の点で表わされるから，$\mathsf{L}_n{}^r$ は n^2 パラメタ連続群である．これに対して，複素空間においては，a_{ik} はその実数部分と虚数部分の二つの独立なパラメタで定まるから，$\mathsf{L}_n{}^c$ は $2n^2$ パラメタ連続群である．

L_n に関する事柄はあとで必要に応じて記すこととし，次に一次変換の合成がベクトル成分の変換，或いはその変換行列についてどう表わされるかを求めよう．一次変換 A, B がそれぞれ

$$x_j{}'=\sum_k a_{jk}x_k, \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n) \tag{5.10}$$

$$x_i{}''=\sum_j b_{ij}x_j{}' \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n) \tag{5.11}$$

で表わされるものとすれば，その合成変換：C = BA は，(5.11) の $x_j{}'$ に (5.10) を代入して，

$$x_i'' = \sum_k c_{ik} x_k = \sum_{j,k} b_{ij} a_{jk} x_k \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

となる．よって変換 C の行列成分は

$$c_{ik} = \sum_j b_{ij} a_{jk} \qquad (i,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{5.12}$$

で与えられる．これが**行列の合成**或いは**積**を規定する．言葉でいい表わせば，‘行列 $C=BA$ の $(i,\ k)$ 成分は，行列 B の i 行と A の k 列の相対応する成分を掛け合わせて加えたものである.’ 即ち行列式の掛け算と同様の規則に従う．ただし行列式は行と列とを交換しても値が変わらないから，行と行，或いは列とを掛け合わせてもよいが，行列の掛け算のときは行と列とを注意して区別する必要がある．この行列の合成，或いは乗法が結合法則を満足することは，(5.8) から明かであるが，交換法則：$BA=AB$ は一般に成立しないことは簡単な例で示される．例えば，

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

一次写像を基底の変換として書くと，その合成写像 BA による基底の変換は

$$\mathbf{e}_k'' = B\,\mathbf{e}_k' = BA\,\mathbf{e}_k = \sum_j B(\mathbf{e}_j a_{jk}) = \sum_{i,j} \mathbf{e}_i b_{ij} a_{jk}$$

である．これは (5.12) により，ベクトルの変換 $\mathbf{x}''=BA\mathbf{x}$ に対応する．この場合，写像 B は基底 $\{\mathbf{e}_j\}$ を $\left\{B\mathbf{e}_j = \sum_i \mathbf{e}_i b_{ij}\right\}$ に移す（即ち写像を表わす行列は，いつも最初の基底によって表わされている）もので，$\{\mathbf{e}_j\}$ を $\left\{\sum_i \mathbf{e}_i' b_{ij}\right\}$ へ移すものでないことに注意を要する．

もし基底の変換が

$$\mathbf{e}_j' = \sum_i \mathbf{e}_i a_{ij}, \qquad \mathbf{e}_k'' = \sum_j \mathbf{e}_j' b_{jk} \tag{5.13}$$

で与えられるとすれば，

$$\mathbf{e}_k'' = \sum_{i,j} \mathbf{e}_i a_{ij} b_{jk} \tag{5.14}$$

であるから，変換行列は AB となり，‘合成の順が逆になる.’

行列の掛け算は行列式の掛け算の規則と同様であるから，$C=BA$ であれば，

$$\det(C) = \det(B)\det(A),$$

従って特に $\det(A)=1$，$\det(B)=1$ であれば，$\det(C)=1$ である.

恒等変換は，

$$x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2, \quad \cdots\cdot, \quad x_n' = x_n$$

なる変換であるから，行列

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots\cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdots\cdot & 0 \\ \cdots\cdot & \cdots\cdot & & \cdots\cdot \\ 0 & 0 & \cdots\cdot & 1 \end{bmatrix} \tag{5.15}$$

即ち対角成分が全部1で，他の成分が悉く0である行列で表わされる．これを**単位行列**という．特に次元数を明示する必要があるときには E_n と記すことにする．その (i, k) 成分を表わすのに，

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & (i=k), \\ 0 & (i \neq k) \end{cases} \tag{5.16}$$

なる，いわゆる **Kronecker の delta** と称せられる記号が用いられる．(5.15) から明かなように，‘恒等変換 E の行列式は1である’：

$$\det(E) = 1.$$

一次変換 A とその逆変換 A^{-1} との間には $\mathrm{AA}^{-1} = \mathrm{E}$ の関係があるから，

$$\det(A)\det(A^{-1}) = 1,$$

従って $\det(A)=1$ であれば，$\det(A^{-1})=1$ である．よって‘行列式が1である一次変換の集合はまた群を作っている.’これは前に述べた完全一次群の部分群で，**特殊一次群** $\mathsf{SL} = \mathsf{SL}_n$ と称せられる．SL_n においては n^2 個の行列成分の間に $\det(A)=1$ の一つの条件があるから $\mathsf{SL}_n{}^r$，$\mathsf{SL}_n{}^c$ はそれぞれ n^2-1,

$2(n^2-1)$ パラメタの連続群である*.

以上行列式について述べたことは，特殊の基底に関するベクトル成分の間の一次変換による表現についていったことであるから，これが‘基底の取り方に無関係に成立つ,’いわゆる**不変**の性質であることをいわなければ十分でない．そのためには基底の採り方を変えたとき，同じ変換 $\mathrm{A}:\mathbf{x}\to\mathbf{x}'$ がどんな形に表現されるかを知る必要がある．これを述べる前に，行列の定義を少し拡張しておこう．

一次変換の行列 A (5.7) は，行の数と列の数とがいずれも n 個で相等しいが，これらが異なる m 行 n 列の行列を考えることができる．これを区別する際には，その形から名を取って，$m=n$ のものを**正方行列**，$m\neq n$ のものを**矩形行列**と名付ける．極端な場合として1行或いは1列のみより成る行列も考えられる．例えばベクトル成分 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を n 行1列の行列と考えることができる．ベクトル成分を縦に1列に並べた行列を x と記すことにする．矩形行列については掛け算ができるのは前因子の列数と後因子の行数が等しい場合に限られる．即ち B を m 行 p 列，A を p 行 n 列の行列とすれば $C=BA$ は m 行 n 列の行列で，その成分は

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{p}b_{ij}a_{jk} \qquad (i=1,\cdots,m;\ k=1,2,\cdots,n) \tag{5.17}$$

で与えられる．

この行列の掛け算の記号を用いれば，一次変換 (5.6) を，行列記号で，

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

即ち

* $\mathrm{SL}_n{}^c$ は，そのパラメタ（実変数）について $\det(A)$ の実部が 1，虚部が 0 という 2 個の条件がついている．

$$x' = Ax \tag{5.18}$$

と書き表わすことができる．これは甚だ便利な記法で，今後もしばしば用いる．

そこでベクトル空間 $\mathbf{V}_n$ における二組の基底を $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots\cdot, \mathbf{e}_n$; $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots\cdot, \mathbf{u}_n$ とし，

$$\mathbf{x} = \sum_i x_i\mathbf{e}_i = \sum_i \xi_i\mathbf{u}_i, \qquad \mathbf{x}' = \sum_i x_i'\mathbf{e}_i = \sum_i \xi_i'\mathbf{u}_i$$

とする．基底 $(\mathbf{e}_1, \cdots\cdot, \mathbf{e}_n)$ を $(\mathbf{u}_1, \cdots\cdot, \mathbf{u}_n)$ で表わしたものを

$$\mathbf{e}_i = \sum \mathbf{u}_k s_{ki} \tag{5.19}$$

とすれば，前に記したように，成分の間の変換は

$$x_i = \sum s_{ik}\xi_k$$

で与えられる．これを行列の間の関係で表わせば，

$$x = S\xi. \tag{5.20}$$

ただし S は s_{ik} を成分とする正方行列，ξ は $(\xi_1, \xi_2, \cdots\cdot, \xi_n)$ なる成分を持った n 行 1 列の行列である．(5.18), (5.20) から，

$$S\xi' = x' = Ax = AS\xi$$

が得られる．この式の両辺に左から S^{-1} を掛ければ，

$$\xi' = S^{-1}AS\xi.$$

従って基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots\cdot, \mathbf{e}_n$ に対し行列 A で表わされる一次変換は，(5.19) により基底 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots\cdot, \mathbf{u}_n$ に移れば，行列

$$A' = S^{-1}AS \tag{5.21}$$

で表わされる．A' のことを A を S で**変形**した行列という．行列 A と $A' = S^{-1}AS$ とは同じ変換 A を表現するもので，ただ基底が異なるためにその成分の値が異なるだけであるので，**同値**な行列と称せられる．同値な行列 A と A' との行列式の値が等しいことは，行列式は数であるから，掛け算の交換法則が適用されて，

$$\det(S^{-1})\det(A)\det(S) = \det(S^{-1})\det(S)\det(A) = \det(A)$$

であることからわかる．従って前に変換 A の行列式と称したものは，基底の如何によらず，変換 A により一義的に定まるもので，その呼称の正当なることが確められた．

なお $S^{-1}S=E$ なる関係を $S^{-1}ES=E$ と考えれば，単位行列は任意の正方行列で変換しても変化しないことがいえる．これは基底を変えても恒等変換は常に $x_i'=x_i$ の形に表わされることを思えば当然過ぎることである．

最後に一次変換の**固有値**について述べることにしよう．一次変換 A により自分自身の定数倍になるベクトル，即ち $A\mathbf{x}=\alpha\mathbf{x}$ なるベクトル $\mathbf{x}$ を考える．$\mathbf{x}$ の成分 x_1, x_2, $\cdots\cdot$, x_n は

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdot+a_{1n}x_n=\alpha x_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdot+a_{2n}x_n=\alpha x_2, \\ \cdots\cdot \quad \cdots\cdot \quad \cdots\cdot \quad \cdots\cdot \quad \cdots\cdot \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots\cdot+a_{nn}x_n=\alpha x_n \end{array}\right\} \tag{5.22}$$

から定まる．この式を，行列の間の関係として，

$$Ax=\alpha x \tag{5.23}$$

と書くことができる．ただし行列 A に数 c を掛けたものは，A の各成分を c 倍することを意味する．(5.23) の右辺を左辺へ移項すれば，これはまた

$$(A-\alpha E)x=0$$

とも書かれる．

(5.22) を未知数 x_1, x_2, $\cdots\cdot$, x_n の間の連立一次同次方程式と見れば，$x_1=x_2=\cdots\cdot=x_n=0$，即ち 0 ベクトルがこれを満足することはいうまでもないが，これ以外に解があるとすれば，度々用いた論法で，

$$\det(A-\alpha E)=\begin{vmatrix} a_{11}-\alpha & a_{12} & \cdots\cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\alpha & \cdots\cdot & a_{2n} \\ \cdots\cdot & \cdots\cdot & \cdots\cdot & \cdots\cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdot & a_{nn}-\alpha \end{vmatrix}=0 \tag{5.24}$$

でなければならない．この α に関する n 次方程式を変換 A の**固有方程式**，その根を**固有値**という．固有方程式，従って固有値が基底の選び方に無関係な不変の意味を有することは次のようにして示される．A と同値な $S^{-1}AS$ に対する固有方程式の左辺

$$S^{-1}AS-\alpha E=S^{-1}(A-\alpha E)S$$

の行列式を作れば，

$$\begin{aligned}\det(S^{-1}AS-\alpha E)&=\det(S^{-1})\det(A-\alpha E)\det(S)\\&=\det(S^{-1})\det(S)\det(A-\alpha E)\\&=\det(A-\alpha E)\end{aligned}$$

となる．故に固有方程式のみならず，**固有多項式** $\det(A-\alpha E)$ が不変の意味を持つことが証明された．従ってこの多項式の各累乗の係数が基底の取り換えに対する不変式である．この中で α を含まない項 $\det(A)$ が不変なることは既に述べた通りであるが，他の重要な不変式は α の $n-1$ 乗の係数に $(-)^{n-1}$ を掛けたもの：

$$a_{11}+a_{22}+\cdots\cdot+a_{nn}$$

で，行列 A の対角成分の和である．これを変換 A の**跡**といい，Sp (A) 或いは trace (A) と記す．‘変換 AB と変換 BA の跡が一致する’ことは，そのいずれもが

$$\sum_{i,j}a_{ij}b_{ji}$$

に等しいことから，すぐにわかる．

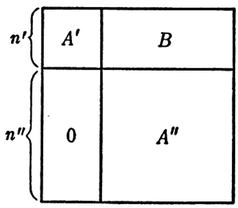
代数学の基本定理により，方程式 (5.24) は複素数の範囲で必ず根を有するから，任意の一次変換に対して‘固有値は必ず存在する.’ 固有値 α が定まれば，(5.22) を満足するベクトル $\mathbf{x}$ が定まる．これを**固有ベクトル**と称する．一つの固有値 α に対する‘固有ベクトルの集合は一次部分空間を作る.’ これは，$\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ が $A\mathbf{x}=\alpha\mathbf{x}$, $A\mathbf{y}=\alpha\mathbf{y}$ を満足すれば，$c\mathbf{x}$, $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ もこれを満足することから明かである．これを変換 A の固有値 α に対する**固有空間**といい，$\mathbf{V}(\alpha)$ と記す．

任意の一次変換 A に対し，‘$A\mathbf{x}=\alpha\mathbf{x}$ を満足する数 α およびベクトル $\mathbf{x}$ が，(少くとも一つは) 存在する’ことは，後に色々な場合に度々用いる定理であるから，よく御記憶を願う．

ベクトル空間 $\mathbf{V}=\mathbf{V}_n$ における一次変換 A によって，$\mathbf{V}$ の n' 次元の部分空間 $\mathbf{V}'$ の任意のベクトルがやはり $\mathbf{V}'$ のベクトルに変換されるとき，即ち $\mathbf{V}'$ に属するベクトルは変換 A によってその中だけで変わり，$\mathbf{V}'$ から外へ出ることがないとき，‘変換 A は部分空間 $\mathbf{V}'$ を**不変にする**’という．この場合には，$\mathbf{V}'$ の基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots\cdots, \mathbf{e}_{n'}$ は，相互の間だけで変換されるから，これと独立な $\mathbf{e}_{n'+1}, \cdots\cdots, \mathbf{e}_n$ なる $n-n'$ 個のベクトルを取って来て全空間 $\mathbf{V}$ の基底を構成すれば，変換 A は

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_i' &= \sum_{k=1}^{n'} \mathbf{e}_k a_{ki}, \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n') \\ \mathbf{e}_j' &= \sum_{h=1}^{n} \mathbf{e}_h a_{hj} \qquad (j=n'+1,\ \cdots\cdots,\ n) \end{aligned}\right\} \tag{5.25}$$

となり，変換行列は第 26 図のような形になる．$\mathbf{V}$ が二つの部分空間 $\mathbf{V}'+\mathbf{V}''$ に分解され，変換 A が‘各の部分空間 $\mathbf{V}', \mathbf{V}''$ を不変にする’ときには，$\mathbf{e}_1, \cdots\cdots, \mathbf{e}_{n'}$; $\mathbf{e}_{n'+1}, \cdots\cdots, \mathbf{e}_n$ は各個別別に相互の間だけで変換される．よって (5.25) の第二の式の h に対する加算は $h=n'+1$ から n までとなり，その行列 A は第 26 図において $B=0$ としたものになる．この場合空間 $\mathbf{V}$ は変換 A に対して**完全に分解する**，或いは**解離**するという．



第 26 図

このように完全分解の場合には，A', A'' はそれぞれ部分空間 $\mathbf{V}', \mathbf{V}''$ における変換の行列になり，その意味が明かであるが，そうでない場合には，行列 A'' は何を表わすか？ これを意味付けるためには**商空間**(または剰余空間，或いは因子空間)の概念を導入するのが便利である．

ベクトル空間 $\mathbf{V}$ のベクトル $\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{x}_2$ とが，‘部分空間 $\mathbf{V}'$ における成分だけ

を異にするとき.' 即ち $\mathbf{x}$ を $\mathbf{V}'$, $\mathbf{V}''$ に属する成分にわけて，$\mathbf{x}_1=\mathbf{x}_1'+\mathbf{x}_1''$, $\mathbf{x}_2=\mathbf{x}_2'+\mathbf{x}_2''$ と書いたとき，$\mathbf{x}_1''=\mathbf{x}_2''$ であるとき，$\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{x}_2$ とは '部分空間 $\mathbf{V}'$ を**法**として等しいといい,' $\mathbf{x}_1=\mathbf{x}_2\,(\mathrm{mod}\,\mathbf{V}')$ と記す．この場合には $\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2=\mathbf{x}_1'-\mathbf{x}_2'$ は $\mathbf{V}'$ に属するから，$\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{x}_2$ とが $\mathrm{mod}\,\mathbf{V}'$ で等しいとは，$\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{x}_2$ との差が $\mathbf{V}'$ に属すること，或いは $\mathbf{V}'$ に属するベクトルだけの差は問題にしないことである．ベクトル $\mathbf{x}\,(\mathrm{mod}\,\mathbf{V}')$ の集合は一つのベクトル空間を作る．これを $\mathbf{V}'$ による $\mathbf{V}$ の**商空間**といい，$\mathbf{V}\,(\mathrm{mod}\,\mathbf{V}')$ 或いは $\mathbf{V}/\mathbf{V}'$ と記す．'A'' は商空間 $\mathbf{V}/\mathbf{V}'$ においてベクトルの変換 A に対応する一次変換を表わす行列である.'

§6. 直交変換および直交群

三次元空間においては，ベクトル $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ の直交座標系に関する成分をそれぞれ (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) として，$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ とのスカラー積 $\mathbf{xy}$ が

$$\mathbf{xy}=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$$

で与えられ，

$$\mathbf{xx}=\mathbf{x}^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2$$

がベクトル $\mathbf{x}$ の大きさの二乗を表わすことは御承知の通りである．n 次元空間においても，これを拡張して，ベクトル $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ との**スカラー積**を

$$\mathbf{xy}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots\cdot+x_ny_n, \tag{6.1}$$

ベクトル $\mathbf{x}$ の**大きさの二乗** $\mathbf{xx}=\mathbf{x}^2$ を

$$\mathbf{x}^2=x_1^2+x_2^2+\cdots\cdot+x_n^2 \tag{6.2}$$

で定義することができる．$\mathbf{x}^2=1$ なるベクトルを**単位ベクトル**と呼ぶのは普通のときと同じである．ベクトルの大きさが (6.2) で与えられるようなベクトル空間 $\mathbf{V}$ を**ユークリッド**（ベクトル）**空間**という．

スカラー積 $\mathbf{xy}$ に対して次の法則が成立つことは定義から明かである：

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{yx} = \mathbf{xy},\\ &(c\mathbf{x})\mathbf{y} = \mathbf{x}(c\mathbf{y}) = c\mathbf{xy},\\ &(\mathbf{x}+\mathbf{y})\mathbf{z} = \mathbf{xz}+\mathbf{yz}, \qquad \mathbf{x}(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = \mathbf{xy}+\mathbf{xz}.\end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

やはり三次元実ベクトルからの類推で，$\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ のスカラー積が $0 : \mathbf{xy} = 0$ なるとき $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ とは垂直である，または**直交**するという.

上のスカラー積の定義によれば，(4.5) に与えた n 個のベクトル $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\cdots$, $\mathbf{e}_n$ は互に直交する単位ベクトルである．そのことは，(5.16) の記号を用いれば，

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k = \delta_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \cdots, n) \tag{6.4}$$

で表わされる．(6.4) を満足する基底を**規準直交系**或いは**ユークリッド基底**という.

前節の行列算法の記号を用いれば，スカラー積 (6.1) は

$$\mathbf{xy} = x^*y \tag{6.5}$$

と書き表わせる．ただし x^* は $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ なる 1 行 n 列の行列で，x で表わした n 行 1 列の行列の行と列とを交換したものに当る．一般に m 行 n 列の行列 A の行と列とを交換した行列，即ち

$$b_{ik} = a_{ki} \qquad (i = 1, 2, \cdots, m ; k = 1, 2, \cdots, n) \tag{6.6}$$

なる成分を有する n 行 m 列の行列 B を A の**転置行列**といい，$B = A^*$ と記す．x^* は即ち x の転置行列である．A が正方行列のときには，A^* は A の成分を対角線について引くり返したものであるので，A の鏡像行列とも呼ばれる.

行列の合成 $C = BA$ において，その成分：

$$c_{ik} = \sum_j b_{ij}a_{jk}$$

の両辺を転置すれば，

$$c_{ki}^* = c_{ik} = \sum_j a_{jk}b_{ij} = \sum_j a_{kj}^*b_{ji}^*$$

となるから，$C^* = (BA)^* = A^*B^*$，即ち‘転置行列に移れば，行列の合成の順序が逆になる.’

もとへ戻って，ベクトル $\mathbf{x}$ に $x'=Ax$ なる変換を施せば，その大きさの二乗：x^*x は

$$x'^*x' = (Ax)^*(Ax) = x^*A^*Ax$$

となる．よって変換行列 A が

$$A^*A = E \tag{6.7}$$

の条件を満たすときには，変換 A に対し，$\mathbf{x}'^2=\mathbf{x}^2$ で，ベクトルの大きさが不変である．$(\mathbf{x}+\mathbf{y})^2=\mathbf{x}^2+2\mathbf{xy}+\mathbf{y}^2$ からわかるように，$(\mathbf{x}+\mathbf{y})^2$, $\mathbf{x}^2$, $\mathbf{y}^2$ が不変であれば，スカラー積 $\mathbf{xy}$ も不変である．よって，変換 A により，基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots\cdots, \mathbf{e}_n$ が基底 $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \cdots\cdots, \mathbf{e}_n'$ に変わるものとすれば，これらに対しても (6.4) と同じ関係

$$\mathbf{e}_i'\mathbf{e}_k' = \delta_{ik} \qquad (i,\ k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

が成立つ．このような A は規準直交基底の間の変換であるので**直交変換**と称せられる．それは‘ベクトルの大きさを表わす式 (6.2) を不変にすることにより特徴付けられる.’

(6.7) は A^* が A の逆行列であることを示す．従ってまた

$$AA^* = E \tag{6.8}$$

である．(6.7), (6.8) は，行列合成の規則により，次のように言葉でいい表わすことができる．‘直交変換の行列 A の各列(行)の成分の二乗の和は 1 で，異なる列(行)の相対応する成分の積の和は 0 である.’ このような行列を**直交行列**といい，(6.7) 或いは (6.8) を**直交条件**と称する．

行列式は，その行と列とを交換しても，値に変わりがないから，$\det(A^*) = \det(A)$，よって (6.7) から，$\det(A)$ の二乗が 1，即ち

$$\det(A) = \pm 1 \tag{6.9}$$

なることがわかる．従って直交変換に対しては，逆変換が存在する．

直交変換を合成したものは，やはりベクトルの大きさを不変にするから，また一つの直交変換である．恒等変換は勿論一種の直交変換であるし，直交変換

の逆変換もまたベクトルの大きさを変えない直交変換であるから，'直交変換の全体は一つの群を作る.' これを**直交変換群**，或いは略して**直交群** $\mathbf{O}=\mathbf{O}_n$ と呼ぶ．実空間においては，行列 A の n^2 個の成分の間に，各列の成分の二乗の和が 1 である n 個の関係と，異なる列の対応成分の積の和が 0 であることを表わす，n 個の間から異なる 2 個を取る組合せの数 $n(n-1)/2$ 個の関係があるから，$\mathbf{O}_n{}^r$ のパラメタの数は $n(n-1)/2$，複素空間においては成分の独立なパラメタの数が 2 倍になると共に，条件の方も実数部分，虚数部分に対して成立つ 2 倍のものになるから，パラメタ数は $n(n-1)$ である．

我々は既に第 1 章において，回転を表わす行列 (1.1) が (6.7) の関係を満足することを知っている ((1.7) および (1.8))．従って回転を表わす変換 A は $\mathbf{O}_3{}^r$ に属する．回転と，これを表わす一次変換との対応は一対一であるから，その必要のないときには，以下これを区別せず，変換 A のことを単に回転，その集りを回転群と呼ぶことにする．そうすれば回転群 $\mathbf{R}_3$ は直交群 $\mathbf{O}_3$ の部分群である．回転群の特徴は (1.9)：

$$\det(A)=+1 \tag{6.10}$$

に在る．一般に $\mathbf{V}_n$ においても，$\mathbf{O}_n$ に属する変換の中で $\det(A)=+1$ なるものは部分群を作っている．これを n 次元の**回転群**と呼ぶ．時に $\mathbf{O}_n$ の元で $\det(A)=-1$ のものも含めて**広義**の回転群と称することもある．その場合には $\det(A)=+1$ のものを**本義回転**或いは**純粋回転**，$\det(A)=-1$ のものを**転義回転**と称する．この呼称に従えば，$\mathbf{O}$ は**広義の回転群**である．その意味で，これを記号 $\mathbf{R}'$ で表わす．

転義回転と本義回転との関係を明かにするために，ここに群に関する一般の事柄を少し差しはさむことにしよう．

その前に，まず集合につき予備的のことを述べる．わかり切ったようなことが多いが，一応その概念，記号の意味をはっきりつかんで，これに慣れておくことが必要である．

M が $a, b, c, \cdots\cdots$ の集合であることを $\mathsf{M}=\{a, b, c, \cdots\cdots\}$ と記し，a が M に属する，即ち a が M の一つの元であることを $a\in\mathsf{M}$ で表わす．二つの集合 M, N があって，N の総べての元が M に属するとき，N は M に含まれる，或いは N は M の部分集合であるといい，$\mathsf{N}\subset\mathsf{M}$，または $\mathsf{M}\supset\mathsf{N}$ と記す．例えば偶数の集合は整数の集合の部分集合，部分群はもとの群の部分集合である．N の総べての元が M に属し，逆に M の総べての元が N に属するとき，即ち $\mathsf{N}\subset\mathsf{M}$ と $\mathsf{M}\subset\mathsf{N}$ とが同時に成立つとき，M と N とは等しいといい，$\mathsf{M}=\mathsf{N}$ と記す．

整数の集合を，偶数の集合と奇数の集合とに分けるように，集合 M をいくつかの共通部分を持たない部分集合の組に分類したとき，各の部分集合を**類**と呼ぶ．M の元 a, b が同じ類に属するとき，a は b と**同値**であるといい，これを $a\sim b$ で表わす．同値の元の間には次の関係が成立つことが要求される：

(i) $a\sim a$,　(ii) $a\sim b$ ならば $b\sim a$,

(iii) $a\sim b$, $b\sim c$ であれば $a\sim c$.　(6.11)

これは集合を同値なものの類に分けるときの基本原則になるもので**同値関係**と呼ばれる．

群の場合のように，集合 M の元の間に合成則が規定されているときには，$\mathsf{M}=\{a, b, c, \cdots\cdots\}$ の総べての元に，特定の元 p を合成したものの集合：

$$\{pa,\ pb,\ pc,\ \cdots\cdots\}$$

を $p\mathsf{M}$ と記す．例えば自然数の集合に 2 を掛ければ偶数の集合が得られる．$p\mathsf{M}$ の元は総べて集合 M の元であるから，$p\mathsf{M}\subset\mathsf{M}$ なることは明かである．特に M が群 G であるときには，その任意の元 s は $r=p^{-1}s$ として $s=pr$ のように表わせるから，$p\mathsf{G}\subset\mathsf{G}$ と共に $\mathsf{G}\subset p\mathsf{G}$ が成立つ．従って $p\mathsf{G}=\mathsf{G}$ である．更に $\mathsf{H}=\{p, q, \cdots\cdots\}$ を G の部分集合とし，$p\mathsf{G}, q\mathsf{G}, \cdots\cdots$ の集合を HG と記すことにすれば，$\mathsf{HG}=\mathsf{G}$ である．特に $\mathsf{H}=\mathsf{G}$ とすれば $\mathsf{GG}=\mathsf{G}$ の関係を得る．

いうまでもないことであるが, $p\mathbf{M}=\mathbf{M}$ というのは $\{pa, pb, pc, \cdots\cdots\}$ が全体として $\{a, b, c, \cdots\cdots\}$ に等しいことで, $pa=a$, $pb=b$, $pc=c$, $\cdots\cdots$ の意味ではない. また $\mathbf{GG}=\mathbf{G}$ は, $\mathbf{GG}$ の元は必ず $\mathbf{G}$ に属し, また $\mathbf{G}$ の元は必ず $\mathbf{GG}$ の元であることで, $\mathbf{G}$ の各の元を掛け合わせたものの数が $\mathbf{G}$ の元の数に等しいことではないことは定義から明かであるが, 誤解を避けるために一寸お断りをしておく.

そこで群 $\mathbf{G}$ の部分群を $\mathbf{H}=\{p, q, \cdots\cdots\}$, r_1 を $\mathbf{H}$ に属しない $\mathbf{G}$ の元として, $r_1\mathbf{H}$ なる集合を作る. 次に $\mathbf{H}$ にも $r_1\mathbf{H}$ にも含まれない元 r_2 があれば, これを用いて $r_2\mathbf{H}$ なる集合を作る. これを繰返して, $\mathbf{H}$, $r_1\mathbf{H}$, $\cdots\cdots$, $r_{j-1}\mathbf{H}$ に含まれない $\mathbf{G}$ の元 r_j があるときには, これを用いて $r_j\mathbf{H}$ なる集合を作る. このようにして, $\mathbf{G}$ の総べての元が $r_j\mathbf{H}$ のどこかに含まれるようになったとすれば, $\mathbf{G}$ は $r_j\mathbf{H}$ $(j=0, 1, 2, \cdots\cdots, r_0=e)$ の類に分れる. これを部分群 $\mathbf{H}$ の**左剰余類**と呼んでいる. 異なる剰余類には共通の元はない. 何となれば, もし $r_jp=r_iq$ $(p, q\in\mathbf{H})$ とすれば, 右から p^{-1} を掛けて $r_j=r_i qp^{-1}$ となり, r_j は既に $r_i\mathbf{H}$ $(i<j)$ に含まれてしまっているからである.

同一剰余類に含まれる元, 即ち同値の元 s, t は $s=r_ip$, $t=r_iq$ $(p, q\in\mathbf{H})$ の形をしているから,

$$t^{-1}s=q^{-1}r_i^{-1}r_ip=q^{-1}p\in\mathbf{H}.$$

よって $t^{-1}s\in\mathbf{H}$ が s が t に同値であることの条件である. この条件が同値関係 (6.11) を満たすことは次のようにして容易に証明される:

(i) $s^{-1}s=e\in\mathbf{H}$, (ii) $s^{-1}t=(t^{-1}s)^{-1}\in\mathbf{H}$,

(iii) $t^{-1}s\in\mathbf{H}$, $s^{-1}u\in\mathbf{H}$ とすれば, $t^{-1}u=t^{-1}ss^{-1}u\in\mathbf{H}$.

左剰余類を定義したのと同様に, $\mathbf{G}$ を集合 $\mathbf{H}r_i$ の集りとして分類することができる. これを $\mathbf{H}$ の**右剰余類**という. この場合の同値の元 s, t は $ts^{-1}\in\mathbf{H}$ の条件で定まる.

このように部分群 $\mathbf{H}$ には二種の剰余類が存在するが, この両者が一致する

ためには，$\mathbf{H}$ がどういうものであればよいかを考えてみよう．そのためには，$\mathbf{G}$ の任意の元 s に対して，$s\mathbf{H}=\mathbf{H}s$ なることが必要かつ十分である．この左から s^{-1} を掛ければ $s^{-1}\mathbf{H}s=\mathbf{H}$ を得る．

群の任意の元 r, s に対して，$s^{-1}rs$ なる元を r を s で**変形**した元という．よって上の条件は $\mathbf{H}$ の元を $\mathbf{G}$ の任意の元 s で変形したものが $\mathbf{H}$ に属することを意味する．このような性質を持った部分群，即ち‘任意の元 s で変形しても不変であるような部分群’$\mathbf{N}$ を**不変部分群**と称する．即ち‘不変部分群とは $\mathbf{N}=s^{-1}\mathbf{N}s$ が $\mathbf{G}$ の任意の元 $s\in\mathbf{G}$ につき成立つようなものである.’このような不変部分群に対しては $s\mathbf{N}=\mathbf{N}s$ であるから，その剰余類に左右の区別が不要であることは明かである．

そこで $\mathbf{N}$ を群 $\mathbf{G}$ の不変部分群とし，$\mathbf{N}$ の二つの剰余類を $\mathbf{R}=r\mathbf{N}=\mathbf{N}r$, $\mathbf{S}=s\mathbf{N}=\mathbf{N}s$ とし，$\mathbf{R}$ と $\mathbf{S}$ との積を作れば，

$$\mathbf{SR}=s\mathbf{NN}r=s\mathbf{N}r=sr\mathbf{N}$$

であるから，$\mathbf{SR}$ も一つの剰余類である．よって‘不変部分群 $\mathbf{N}$ の剰余類を元とする集合は群を作る．これを不変部分群による $\mathbf{G}$ の**因子群**と呼び，$\mathbf{G/N}$ で表わす．因子群の単位元は $\mathbf{SN}=\mathbf{NS}=\mathbf{S}$ を満足する不変部分群 $\mathbf{N}$ 自身である．

群に関する抽象的記述が長くなったが，いいたいことは回転群 $\mathbf{R}$ が直交群 $\mathbf{O}$ の不変部分群であって，直交群の元がこれによって二つに分類されることである．即ち B を $\mathbf{R}$ の元とすれば，$\mathbf{O}$ の任意の元 A に対し，

$$\det(A^{-1})\det(B)\det(A)=\det(B)=1$$

であるから $\mathrm{A}^{-1}\mathrm{BA}$ がまた $\mathbf{R}$ に属する．よって $\mathbf{R}$ は $\mathbf{O}$ の不変部分群である．$\mathbf{R}$ に属しない $\mathbf{O}$ の元としては，例えば $\mathbf{e}_1$ の方向の鏡像，（$\mathbf{e}_2$, $\cdots$, $\mathbf{e}_n$ の張る空間（n 次元空間の平面）に関する鏡像）S_1 を取ることができる．鏡像 S_1 は $x_1'=-x_1$, $x_2'=x_2$, $\cdots$, $x_n'=x_n$ で，その行列は

$$S_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots\cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdots\cdot & 0 \\ \cdots\cdot & \cdots\cdot & \cdots\cdot & \\ 0 & 0 & \cdots\cdot & 1 \end{bmatrix} \tag{6.12}$$

であるから，明かに $\det(S_1) = -1$ である．そこで $\mathrm{S}_1\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathrm{S}_1$ なる剰余類を作ると，その任意の元に対して，

$$\det(S_1)\det(B) = -1 \qquad (B \in \mathbf{R})$$

である．**R** が直交条件 (6.7) を満足する $\det(B) = 1$ の変換の全部であるから，$\mathrm{S}_1\mathbf{R}$ は同じ条件を満たす行列式 -1 の総べての変換を含んでいる．そのことは行列式が -1 である二つの変換 A_1, A_2 に対しては，$A_1^{-1}A_2$ の行列式が $+1$ で必ず **R** に属していることからも明かである．このようにして，直交群の元は二つの類，本義回転群と転義回転群の二つの剰余類に分類されることがわかった．‘奇数次元’の空間では，第二のものの代表元として，**反転** $\iota : x_1' = -x_1$, $x_2' = -x_2$, $\cdots\cdot$, $x_n' = -x_n$ をとることができる．その行列は

$$I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots\cdot & 0 \\ 0 & -1 & \cdots\cdot & 0 \\ \cdots\cdot & \cdots\cdot & \cdots\cdot & \\ 0 & 0 & \cdots\cdot & -1 \end{bmatrix} = -E \tag{6.13}$$

である．そうすれば剰余類 $\iota\mathbf{R}$ は **R** の変換行列の成分の符号を全部変えたものより成る．**O** の **R** に対する因子群は2個の元，即ち単位元 $\mathbf{R} = \eta$ と，$\mathrm{S}_1\mathbf{R} = \zeta$ とより成る．その合成則は

$$\eta\eta = \eta,\ \eta\zeta = \zeta\eta = \zeta,\ \zeta\zeta = \eta$$

である．n が奇数のときには ζ は $\iota\mathbf{R}$ と一致する．I は総べての行列と交換可能：$IA = AI$ であるから，e と ι の2個の元より成る部分群がまた不変部分群 **N** である．次元数 n が奇数のときには，因子群 $\mathbf{O}/\mathbf{N} = \mathbf{R}'/\mathbf{N}$ は，行列式の符号を問題としないのであるから，本質的に **R** と差違のないものである（その合

成則が R と一致する).

§7. ユニタリ変換

ベクトルの大きさを，前節におけるように (6.2) で定義することは，実空間においては甚だ自然であるが，複素空間では必ずしも適当とはいえない．というのは大きさが複素数であることは，ベクトルの大きさの比較を不可能にするし，また，例えば $\mathbf{V}_2$ において，

$$x_1 = \xi + i\xi, \qquad x_2 = \xi - i\xi$$

の成分を持ったベクトルを考えると，その成分が 0 でないのに $\mathbf{x}^2 = 0$ となる．このように成分の全部が 0 でなくて，その大きさが 0 であるベクトルを**等方ベクトル**と名付けて，或る場合には便利に使用されることもあるが，一般にはこのようなものは考えにくい．むしろベクトルの大きさの二乗として，

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}|^2 &= |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots\cdots + |x_n|^2 \\ &= \bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2 + \cdots\cdots + \bar{x}_n x_n \end{aligned} \tag{7.1}$$

を用いた方が都合がよい．ベクトルの大きさがこのように定義されている空間を**ユニタリ**(ベクトル)**空間**と名付ける．(7.1) の形から，二つのベクトル $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ とのスカラー積に相当して，**内積**

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2 + \cdots\cdots + \bar{x}_n y_n \tag{7.2}$$

を定義する．そして

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \tag{7.3}$$

のとき‘$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ とが直交する’という．前節の直交関係 $\mathbf{xy} = 0$ と区別する必要があるときには，(7.3) を満足するベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ を**ユニタリ直交**と称する．

(7.2) の定義から，内積に関して，

$$(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \overline{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}, \tag{7.4}$$

$$(c\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bar{c}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \qquad (\mathbf{x}, c\mathbf{y}) = c(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \tag{7.5}$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{z}), \quad (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z}) \tag{7.6}$$

等の関係が成立つことは明かである.

ユニタリ空間における $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ なる基底は

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = \delta_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \cdots, n) \tag{7.7}$$

を満足する. このような互にユニタリ直交の単位ベクトルより成る基底を**ユニタリ基底**と呼ぶ.

ユニタリ空間 $\mathbf{V} = \mathbf{V}_n$ の部分空間 $\mathbf{V}'$ に属する総べてのベクトルに垂直なベクトルを‘空間 $\mathbf{V}'$ に垂直なベクトル’という. このようなベクトルの集合はまた一つのベクトル空間 $\mathbf{V}''$ を作る. それは $\mathbf{x}''$, $\mathbf{y}''$ が $\mathbf{V}'$ のベクトル $\mathbf{x}'$ に垂直である: $(\mathbf{x}'', \mathbf{x}') = 0$, $(\mathbf{y}'', \mathbf{x}') = 0$ とすれば, $(c\mathbf{x}'', \mathbf{x}') = 0$, $(\mathbf{x}'' + \mathbf{y}'', \mathbf{x}') = 0$ であるからである. $\mathbf{V}''$ を‘$\mathbf{V}'$ に垂直な部分空間’と称する. そして $\mathbf{V}$ は $\mathbf{V}'$ と $\mathbf{V}''$ とに分解される. 即ち任意のベクトル $\mathbf{x}$ は $\mathbf{V}'$ に属するベクトル $\mathbf{x}'$ と, $\mathbf{V}''$ に属するベクトル $\mathbf{x}''$ との和として一義的に表わされる: $\mathbf{V} = \mathbf{V}' + \mathbf{V}''$. これは殆んど自明であるが, 形式的証明は次の如くである.

部分空間 $\mathbf{V}'$ が, m 個の一次的独立なベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_m$ によって張られるとすれば, $\mathbf{V}''$ は

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{x}) = 0, \quad (\mathbf{a}_2, \mathbf{x}) = 0, \quad \cdots, \quad (\mathbf{a}_m, \mathbf{x}) = 0$$

を満足するベクトル $\mathbf{x}$ の集合である. 一次方程式の理論によれば, このようなベクトル $\mathbf{x}$ の独立なものは $n-m$ 個ある*. 従って $\mathbf{V}''$ は $n-m$ 次元である. そこで $\mathbf{V}''$ の基底を $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{n-m}$ とすれば, $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_j$ を併せれば $\mathbf{V}$ の基底を作る. よって $\mathbf{V}$ の任意のベクトル $\mathbf{x}$ は $\sum_{i=1}^{m} x_i'\mathbf{a}_i + \sum_{j=1}^{n-m} x_j''\mathbf{b}_j$ と書かれる. 即ち $\mathbf{x}' = \sum_{i=1}^{m} x_i'\mathbf{a}_i$ は $\mathbf{V}'$ に, $\mathbf{x}'' = \sum_{j=1}^{n-m} x_j''\mathbf{b}_j$ は $\mathbf{V}''$ に属し, $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{x}''$. 次に $\mathbf{x}$ が二通りの方法で $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{x}'' = \mathbf{y}' + \mathbf{y}''$ と書かれるものとする ($\mathbf{x}', \mathbf{y}' \in \mathbf{V}'$, $\mathbf{x}'', \mathbf{y}'' \in \mathbf{V}''$). そうすれば, $\mathbf{x}' - \mathbf{y}' = \mathbf{y}'' - \mathbf{x}''$ は $\mathbf{V}'$ にも $\mathbf{V}''$ にも直交する. 即ち $\mathbf{V}$ の総べてのベクトルと直交する. このようなベクトルは 0 以外にはない. よって $\mathbf{y}' = \mathbf{x}'$, $\mathbf{y}'' = \mathbf{x}''$.

---

* 例えば, 拙著‘代数学及び幾何学’(共立出版) §28, §34 参照.

前節に直交変換 **O** が $\mathbf{x}^2$ を不変にする一次変換として定義されたように，'$|\mathbf{x}|^2$ を不変にする一次変換' U を**ユニタリ変換**と称する．U は内積の値を変えないから，'ユニタリ変換とはユニタリ基底の間の変換' であるといってもよい．実空間においては $|\mathbf{x}|^2=\mathbf{x}^2$ であるから，ユニタリ変換は直交変換と異なるところがない．複素空間を問題にするときに，はじめてその区別が重要になるのである．

(7.1) は，行列算法の記号を用いれば，

$$|\mathbf{x}|^2 = \bar{x}^* x = \tilde{x} x \tag{7.8}$$

と書き表わされる．ただし $\widetilde{A}$ は行列 A の転置共軛行列 $\bar{A}^*$ である：

$$\tilde{a}_{ik} = \bar{a}_{ki}. \qquad (i,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{7.9}$$

ユニタリ変換を $x'=Ux$ とすれば，$x'^*=x^*U^*$，$\tilde{x}'=\bar{x}^*\,\bar{U}^*=\tilde{x}\widetilde{U}$ であるから，

$$|\mathbf{x}'|^2 = \tilde{x}' x' = \tilde{x}\widetilde{U}Ux.$$

よって $|\mathbf{x}'|^2=|\mathbf{x}|^2$ であるための

$$\widetilde{U}U = E \tag{7.10}$$

なる**ユニタリ条件**を得る．この条件を満足する行列 U を**ユニタリ行列**という．(7.10) は $\widetilde{U}$ が U の逆行列であること，即ち 'ユニタリ行列 U の逆行列は，その転置共軛行列に等しい' ことを示している：

$$U^{-1} = \widetilde{U}. \tag{7.11}$$

従ってまた

$$U\widetilde{U} = E \tag{7.12}$$

である．(7.10), (7.12) をいい換えれば 'ユニタリ行列の各列(行)の絶対値二乗の和は1で，一つの列(行)の成分の共軛複素数と，これと異なる列(行)の相対応する成分の積の和は 0 である' ということである．

(7.10) の両辺の行列式を作れば，

$$\det(\widetilde{U})\det(U) = 1$$

を得る. $\det(\widetilde{U})$ は $\det(U)$ の共軛複素数であるから，これから

$$|\det(U)|^2 = 1, \qquad (7.13)$$

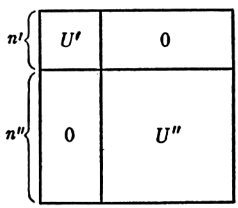
即ち‘ユニタリ行列の行列式の絶対値 $|\det(U)|$ は 1 である’ことが知れる.

二つのユニタリ変換 $\mathrm{U}: \mathbf{x}\to\mathbf{x}'$, $\mathrm{V}: \mathbf{x}'\to\mathbf{x}''$ を合成した変換 $\mathrm{W}=\mathrm{VU}: \mathbf{x}\to\mathbf{x}''$ において，$|\mathbf{x}|^2=|\mathbf{x}'|^2=|\mathbf{x}''|^2$ であるから，W もまたユニタリ変換である. よってユニタリ変換の集合もまた一つの群を作る. これを**ユニタリ群** $\mathsf{U}=\mathsf{U}_n$ という. ユニタリ行列に対しては

$$\sum_i \bar{u}_{ij}u_{ik} = 0 = (0+i0), \qquad (i \neq k)$$
$$\sum_i |u_{ij}|^2 = 1$$

の条件が $n(n-1)+n=n^2$ 個あるから，U_n は n^2 パラメタの連続群である. 実空間の変換としては U は O と一致する. 即ち O^r は U の部分群である.

ユニタリ変換 $\mathrm{U}: \mathbf{x}\to\mathbf{x}'$, $\mathbf{y}\to\mathbf{y}'$ は内積 $\tilde{x}y$ を不変にするから，$(\mathbf{x}, \mathbf{y})=0$ であれば，$(\mathbf{x}', \mathbf{y}')=0$, 即ちユニタリ変換によって垂直なベクトルは垂直なベクトルに変わる. 従って変換 U がベクトル空間 $\mathbf{V}$ の部分空間 $\mathbf{V}'$ を不変にするときには，これに垂直な部分空間 $\mathbf{V}''$ もやはり不変である，即ち‘$\mathbf{V}$ はユニタリ変換 U に対し不変な部分空間 $\mathbf{V}'$ と $\mathbf{V}''$ とに完全分解される’*. よって $\mathbf{V}'$ の基底 $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_{n'}$, $\mathbf{V}''$ の基底 $\mathbf{e}_{n'+1}, \cdots, \mathbf{e}_n$ を空間 $\mathbf{V}$ の基底にとれば，U の行列は第 27 図の形になる. U', U'' がユニタリ行列で，$\mathbf{V}'$, $\mathbf{V}''$ における変換 U′, U″ がユニタリ変換であることは断るまでもないであろう.



第 27 図

次にユニタリ変換 U の固有値につき考察しよう. 固有値 σ は行列方程式 $Ux=\sigma x$ から定まる. これに両辺の転置共軛行列: $\tilde{x}\widetilde{U}=\bar{\sigma}\tilde{x}$ を乗ずれば，ユニタリ条件 (7.10) により，

* ここに述べた完全分解性は，ユニタリ直交の代りに普通の意味の直交の定義を用いれば，直交群についても成立つ.

$$\tilde{x}\tilde{U}Ux = \tilde{x}x = \bar{\sigma}\sigma\tilde{x}x$$

を得る．よって $\bar{\sigma}\sigma = |\sigma|^2 = 1$，即ち‘ユニタリ変換の固有値 σ の絶対値は 1 である.’

そこで変換 U の固有値 σ_1 に対する固有ベクトルを $\mathbf{u}_1$ とする．その大きさは不定であるから，これを単位ベクトルと考えてよい．変換 U は $\mathbf{u}_1$ を $\sigma_1\mathbf{u}_1$ に変えるから，$\mathbf{u}_1$ に垂直な部分空間 $\mathbf{V}_{n-1}$ を不変にする．その中のベクトルは U によってユニタリ変換を受ける．従ってこの部分空間の中に U により σ_2 倍になる単位ベクトル $\mathbf{u}_2$ が存在する．次に $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ に垂直な部分空間がやはり U により不変であるから，その中に U により σ_3 倍になるベクトル $\mathbf{u}_3$ が存在する．$\cdots\cdot$．これを繰返して，

$$(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k) = \delta_{ik} \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ \cdots\cdot,\ n)$$

を満足するユニタリ基底 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots\cdot, \mathbf{u}_n$ が作られる．もとの基底（$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots\cdot, \mathbf{e}_n$）から新しい基底（$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots\cdot, \mathbf{u}_n$）への変換は一つのユニタリ変換である．新基底に対しては，変換 U は $\mathbf{u}_i' = \sigma_i\mathbf{u}_i$ $(i = 1, 2, \cdots\cdot, n)$ で表わされるから，ベクトル成分は

$$\xi_i' = \sigma_i\xi_i \qquad (i = 1,\ 2,\ \cdots\cdot,\ n) \tag{7.14}$$

なる変換を受ける．従ってその変換行列は次の形になる：

$$U_0 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots\cdot & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots\cdot & 0 \\ \cdots\cdot & \cdots\cdot & \cdots\cdot & \\ 0 & 0 & \cdots\cdot & \sigma_n \end{bmatrix}. \tag{7.15}$$

これをユニタリ変換 U の**標準形**という．(7.15) のように対角成分以外の成分が全部 0 である行列は**対角行列**と呼ばれる．よって‘ユニタリ行列は基底を適当に取ることによって対角行列に変形される,’ 或いは ‘対角行列に同値である’:

$$SUS^{-1} = U_0.$$

固有多項式が基底の変換，或いは行列の変形に対して不変であることから，

$$\det(U-\sigma E)=\det(U_0-\sigma E)$$
$$=\begin{vmatrix} \sigma_1-\sigma & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2-\sigma & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & \sigma_n-\sigma \end{vmatrix}$$
$$=(\sigma_1-\sigma)(\sigma_2-\sigma)\cdots\cdots(\sigma_n-\sigma)$$

である．よって固有値 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots\cdots, \sigma_n$ は固有方程式の根である．即ち行列 U の標準形 U_0 の対角成分は変換 U の固有値で，従って $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots\cdots, \mathbf{u}_n$ は $\sigma_1, \sigma_2, \cdots\cdots, \sigma_n$ に対する固有ベクトルである．

このようにして，ユニタリ行列の標準形の対角成分が，順序を度外視すれば，変換 U により，その重複度をも含めて，一義的に定まることを知った．固有値が全部異なる場合には，固有ベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots\cdots, \mathbf{u}_n$ についても同じことがいえる．固有値の等しいものがあるとき，例えば $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$ であるときには，$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ の張る空間 $\mathbf{V}'$ 内のベクトルはどれも U によって σ_1 倍される．これは即ち σ_1 の固有空間 $\mathbf{V}(\sigma_1)$ である．その中のユニタリ基底は一義的には定まらない．$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ に任意のユニタリ変換を施したものがまた $\mathbf{V}(\sigma_1)$ の基底である．即ち固有空間の基底はユニタリ変換の範囲で不定である．従って，‘変換 U によって一義的に定まるのは固有値，およびその各に属する固有空間である.’

ユニタリ変換の標準形につき記したついでに，実空間の直交変換の標準形を求めて置こう．これは複素数の範囲ではユニタリ変換の一種であるから，(7.15) の形になるが，固有値 σ_i の中に実数でないものがあると，実変換にならないから，一般にはそのままでは不都合である．

この場合には $\sigma_1=\sigma$ が固有方程式の根であれば，$\sigma_2=\bar{\sigma}$ もまた根である．これらの固有ベクトルを $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ とすれば，$\mathbf{u}_2=\bar{\mathbf{u}}_1$，かつ σ と $\bar{\sigma}$ とは異なるか

ら $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \bar{\mathbf{u}}_1{}^2 = 0$. 従ってまた $\mathbf{u}_1{}^2 = 0$ である．そこで

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2}{\sqrt{2}}, \qquad \mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2}{i\sqrt{2}}$$

なる実ベクトルを導入すれば，これらに変換 U を施した結果は，

$$\mathbf{v}_1{}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma\mathbf{u}_1 + \bar{\sigma}\bar{\mathbf{u}}_1) = \frac{\sigma+\bar{\sigma}}{2}\mathbf{v}_1 + i\frac{\sigma-\bar{\sigma}}{2}\mathbf{v}_2,$$

$$\mathbf{v}_2{}' = \frac{1}{i\sqrt{2}}(\sigma\mathbf{u}_1 - \bar{\sigma}\bar{\mathbf{u}}_1) = \frac{\sigma-\bar{\sigma}}{2i}\mathbf{v}_1 + \frac{\sigma+\bar{\sigma}}{2}\mathbf{v}_2$$

となる．ここに $|\sigma| = 1$ であるから，$\sigma = e^{-i\varphi}$ とおけば，

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{v}_1{}' &= \quad \mathbf{v}_1\cos\varphi + \mathbf{v}_2\sin\varphi, \\ \mathbf{v}_2{}' &= -\mathbf{v}_1\sin\varphi + \mathbf{v}_2\cos\varphi \end{aligned}\right\}$$

となる．変換 U は $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, 従って $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ にユニタリ直交の空間を不変にする．かつその部分空間のベクトルに直交変換を行う．よってその中に互に垂直な単位ベクトル $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ があって $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ と同種類の変換を行うことがわかる．これを繰返せば，固有方程式の複素根に対する固有ベクトルを全部実ベクトルに変えることができる．実数固有値 ±1 に対してはそのままでよいから，結局‘直交変換の行列は

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\beta & -\sin\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\beta & \cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{7.16}$$

のような形の標準形に変形することができる.’このような行列の行列式は当然 ±1 である.

再び一般の複素空間に戻り，我々は一つのユニタリ行列が，ユニタリ行列による変換により，対角行列になることを知ったが，二つのユニタリ行列 A, B

が同時に対角行列に変換され得るためには，どんな条件があればよいであろうか？

まず二つの行列 A, B が同時に対角形になったとして，その対角成分をそれぞれ $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ とする．そこで行列合成の規則に従って AB および BA を作れば，それはいずれも $(\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2, \cdots, \alpha_n\beta_n)$ を対角成分とする対角行列になるから ‘$AB=BA$ が必要である.’

次にこの条件が満足されるものとして，A が対角行列で表わされるような基底をとる．A の固有値 α に対する固有ベクトルを $\mathbf{u}_\alpha$ とすれば，$A\mathbf{u}_\alpha=\alpha\mathbf{u}_\alpha$. 然るに $AB\mathbf{u}_\alpha=BA\mathbf{u}_\alpha=\alpha B\mathbf{u}_\alpha$ であるから，$B\mathbf{u}_\alpha$ も A の固有値 α に属する固有ベクトルである．即ち $B\mathbf{u}_\alpha$ は α の固有空間 $\mathbf{V}(\alpha)$ に属する．よって $\mathbf{u}_\alpha$ が一義的に定まる場合，即ち $\mathbf{V}(\alpha)$ が一次元であるときには，$B\mathbf{u}_\alpha$ は $\mathbf{u}_\alpha$ の何倍かである：$B\mathbf{u}_\alpha=\beta\mathbf{u}_\alpha$. α が多重固有値であるときには，$\mathbf{V}(\alpha)$ の基底がユニタリ変換の範囲で不定であることを利用し，適当なユニタリ変換により，A に対する不変部分空間 $\mathbf{V}(\alpha)$ 内における変換 B の行列を対角形になおす．それによって A の対角形は破れない．このようにして‘AB = BA なるときには，その行列を同時に対角形にするようなユニタリ基底が存在する’ことが知れた.

§8. エルミート変換

ユニタリ基底，即ち $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k)=\delta_{ik}$ を満足する基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ に対しては，ベクトル $\mathbf{x}$ の大きさの二乗が $|\mathbf{x}|^2=\sum_i \overline{x}_i x_i$ で与えられるが，$\mathbf{e}_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ が任意の n 個の独立なベクトルであるときには，ベクトルの大きさの二乗は

$$|\mathbf{x}|^2=\left(\sum_i x_i\mathbf{e}_i, \sum_k x_k\mathbf{e}_k\right)=\sum_{i,k}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k)\overline{x}_i x_k=\sum_{i,k} g_{ik}\overline{x}_i x_k \tag{8.1}$$

となる．ここに現われた

$$g_{ik}=(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k)=\overline{g}_{ki} \tag{8.2}$$

を成分とする行列 G は

$$G=\widetilde{G} \tag{8.3}$$

の条件を満足する．このように行列 H が転置共軛行列 $\widetilde{H}$ と一致するもの，即ち $H=\widetilde{H}$ なるものを**エルミート行列**と呼び，エルミート行列を変換行列とする．そして，変換：$x_i'=\sum_k h_{ik}x_k$，或いは行列記号で $x'=Hx$ を**エルミート変換**と称する．

エルミート条件 $H=\widetilde{H}$ は，行列成分の間の関係としては，

$$h_{ki}=\bar{h}_{ik} \qquad (i,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{8.4}$$

即ち行列の対角線につき対称な二つの成分が共軛複素数であることを意味する．これを**エルミート対称**という言葉でいい表わすこともある．これから，エルミート変換 H がユニタリ空間 $\mathbf{V}'$ を不変にするときには，これに垂直な部分空間をも不変にすることがわかる．というのは，$\mathbf{V}$ のユニタリ基底を $\mathbf{e}_1$，$\cdots$，$\mathbf{e}_n$ を $\mathbf{V}'$ $(\mathbf{e}_1,\ \cdots,\ \mathbf{e}_{n'})$，$\mathbf{V}''$ $(\mathbf{e}_{n'+1},\ \cdots,\ \mathbf{e}_n)$ なるようにとれば，$\mathbf{V}'$ を不変にする H の行列は一般に第26図のような形になるが，エルミート行列に対しては，その対称性により $B=0$ となるからである．$\mathbf{V}'$，$\mathbf{V}''$ における部分行列 A_1，A_2 もエルミート行列である．かつエルミート性は，次に示すように，基底のユニタリ変換により不変であるから，ユニタリ空間が変換 H に対して不変なものに分れるときには，その各の空間における変換がやはりエルミート変換である．

エルミート行列 H をユニタリ行列 U で変形したもの $U^{-1}HU$ はまたエルミート行列である．それは $U^{-1}HU$ の転置共軛行列は $\widetilde{U}\widetilde{H}\widetilde{U}^{-1}$ であるが，$U\widetilde{U}=E$．従って $\widetilde{U}=U^{-1}$，$\widetilde{U}^{-1}=U$ であるから，これは $U^{-1}\widetilde{H}U$ に等しい．よって $\widetilde{H}=H$ であれば $U^{-1}HU$ についても同様の関係が成立つ．

エルミート行列の積は一般にエルミート行列ではない．それが成立つのは $\widetilde{H_1H_2}=\widetilde{H}_2\widetilde{H}_1=H_2H_1$ が H_1H_2 に等しいとき，即ち‘H_1 と H_2 とが交換可能である場合に限る.’ 従って‘エルミート変換の集合は群を作らない.’

エルミート行列について大切なことは，それが‘ユニタリ変換により，実数

を成分とする対角行列に変形される’ことである.

まずエルミート変換の固有値が実数であることを証明しよう. 方程式

$$Hx = \lambda x \tag{8.5}$$

の両辺の転置共軛行列を作れば,

$$\tilde{x}\widetilde{H} = \bar{\lambda}\tilde{x}. \tag{8.6}$$

(8.5) の左から $\tilde{x}$, (8.6) の右から x を掛け, $\widetilde{H}=H$ なることを顧慮すれば,

$$\tilde{x}Hx = \lambda\tilde{x}x = \bar{\lambda}\tilde{x}x$$

が得られ, 従って $\bar{\lambda}=\lambda$, 即ち固有値が実数であることが知れる.

そこで, 変換の行われる空間をユニタリ空間 $\mathbf{V}$ とし, 変換 H により実数 λ_1 が乗ぜられる単位ベクトルを $\mathbf{u}_1$ とする. $\mathbf{u}_1$ に垂直で H に対して不変な部分空間の中に変換 H により実因数 λ_2 を乗ぜられる単位ベクトル $\mathbf{u}_2$ が存在する. これを繰返して, 互に垂直な n 個の単位ベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots\cdots, \mathbf{u}_n$ が定まる. これらに変換 H を施した結果は $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_n$ を乗ずることである. $\mathbf{u}_1, \cdots\cdots, \mathbf{u}_n$ を $\mathbf{V}$ の基底にとれば, H は

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

の対角行列になる. 始めの基底から $\mathbf{u}_1, \cdots\cdots, \mathbf{u}_n$ への変換はユニタリ基底の間の変換であるから, 一つのユニタリ変換である (証明了). この証明から, ‘固有値の異なる H の固有空間が直交する’ことが, ついでに証明された. $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_n$ が固有値と一致すること, これらの中に等しいものがあるときには固有ベクトルは一義的には定まらないが, 固有空間が一義的に定まること, 可換なエルミート行列は同時に対角形に変形し得ることなどが, ユニタリ変換の場合と同様に証明される.

最後に, 次の章の準備として, 一次変換につき書きもらした事項を補ってお

こう.

変換 A: $\mathbf{x}\to\mathbf{x}'$, B: $\mathbf{x}\to\mathbf{x}''$ に対して, 変換 C: $\mathbf{x}\to\mathbf{x}'+\mathbf{x}''$ を A と B との '和' といい, C = A + B と記す. 和に対する変換行列 $C=A+B$ の行列成分が $c_{ik}=a_{ik}+b_{ik}$ であることは, 記すまでもないことである.

次に $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ をそれぞれ $\mathbf{V}_m$, $\mathbf{V}_n$ なるベクトル空間に属するベクトルとし, それらの成分の mn 個の積

$$z_k = z_{ij} = x_i y_j \tag{8.7}$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m,\ \ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n,$$
$$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ mn=(1,1),\ (1,2),\ \cdots\cdots,\ (2,1),\ \cdots\cdots,\ (m,n))$$

を成分とする $\mathbf{V}_{mn}$ におけるベクトル $\mathbf{z}=\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ を考える. $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ に一次写像 A, B:

$$x'_{i'}=\sum_{i=1}^{m} a_{i'i}x_i, \qquad y'_{j'}=\sum_{j=1}^{n} b_{j'j}y_j$$

を行えば, $\mathbf{z}$ は

$$x'_{i'}y'_{j'}=\sum_i\sum_j a_{i'i}b_{j'j}x_iy_j \tag{8.8}$$

即ち

$$z'_{k'}=\sum_k c_{k'k}z_k\,; \quad c_{k'k}=c_{i'j',ij}=a_{i'i}b_{j'j} \tag{8.9}$$

なる変換を受ける. この写像 C を 'A と B との(クロネッカーまたはテンソル)積' といい, C = A × B と記す. これにちなんで積写像の行われる空間 $\mathbf{V}_{mn}$ を $\mathbf{V}_m$ と $\mathbf{V}_n$ の**積空間**といい $\mathbf{V}_{mn}=\mathbf{V}_m\times\mathbf{V}_n$ と記す. $\mathbf{V}_m$, $\mathbf{V}_n$ の基底を $\mathbf{e}_i$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m)$, $\mathbf{f}_j$ $(j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ とすれば, $\mathbf{e}_{ij}=\mathbf{e}_i\times\mathbf{f}_j$ が $\mathbf{V}_{mn}$ の基底になることは, その成分をとってみればすぐにわかる. $\mathbf{V}_m$ における二つの写像 A_1, A_2, $\mathbf{V}_n$ における B_1, B_2 を合成したとき, $\mathbf{V}_{mn}$ においては,

$$(\mathrm{A}_2\times\mathrm{B}_2)(\mathrm{A}_1\times\mathrm{B}_1)=(\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1\times\mathrm{B}_2\mathrm{B}_1) \tag{8.10}$$

なる合成写像が対応することは (8.9) から明かである. A, B がユニタリ変換であるときには

$$\sum_k \bar{z}_k z_k=\sum_{ij}\bar{z}_{ij}z_{ij}=\sum_i \bar{x}_i x_i \sum_j \bar{y}_j y_j$$

が不変であるから, A × B もユニタリ変換である.

第3章　回転群の表現

§9. 群 の 表 現

三次元空間のユークリッド基底 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}$ (= $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$) が回転 r によって，$\mathbf{e}_i' = \sum_k \mathbf{e}_k a_{ki}$ なるもう一つのユークリッド基底 $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ に移るとすれば，これに対応するベクトル $\mathbf{x}\,(x_1, x_2, x_3 = x, y, z) \in \mathbf{V}_3{}^r$ の変換 $\mathbf{x} \to \mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ は

$$x_i' = \sum_k a_{ik} x_k$$

で与えられる．この回転 r に対応するベクトル $\mathbf{x}$ の変換を $\mathrm{A}(r)$ と記せば，回転の合成：$t = sr$ に対して，一次変換の合成：$\mathrm{A}(t) = \mathrm{A}(s)\mathrm{A}(r)$ が対応することは明かである．回転と一次変換とのこのような対応は，ほかにも種々考えられる．例えば二つのベクトル $\mathbf{x}_1\,(x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{x}_2\,(x_2, y_2, z_2)$ の成分の9個の積

$$\begin{matrix} x_1x_2 & x_1y_2 & x_1z_2 \\ y_1x_2 & y_1y_2 & y_1z_2 \\ z_1x_2 & z_1y_2 & z_1z_2 \end{matrix} \tag{9.1}$$

は前節に記した $\mathbf{V}_9 = \mathbf{V}_3 \times \mathbf{V}_3$ のベクトル $\mathbf{z} = \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$ で（この場合 $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ は同一空間 $\mathbf{V}_3$ に属する)，$\mathbf{x}$ に回転に相当する変換 $\mathrm{A}(r)$ を施したとき，$\mathrm{C}(r) = \mathrm{A}(r) \times \mathrm{A}(r)$ なる一次変換を受け，その合成則は

$$\begin{aligned} \mathrm{C}(s)\mathrm{C}(r) &= \mathrm{A}(s)\mathrm{A}(r) \times \mathrm{A}(s)\mathrm{A}(r) \\ &= \mathrm{A}(sr) \times \mathrm{A}(sr) = \mathrm{C}(sr) \end{aligned}$$

となる．これはいわゆる二階テンソルの変換則である．

(9.1) で $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}$ とすれば，独立な成分は

$$x^2,\ y^2,\ z^2,\ yz,\ zx,\ xy$$

の6個となる．これらの成分と同様の変換則をなす6個の成分で示される量を**二階対称テンソル**という．更に (9.1) から次の**反対称結合**

$$y_1z_2 - y_2z_1, \quad z_1x_2 - z_2x_1, \quad x_1y_2 - x_2y_1 \tag{9.2}$$

を作れば，これは $\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{x}_2$ とのベクトル積 $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$ の成分であるから，回転に対する変換則は $\mathbf{x}$ と同じである．ただし反転 $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$ に対しては，$\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 \to \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$ であるから，ベクトルとベクトル積の変換則は同じでない．

これらの対応のうち最も簡単なものは **R** の総べての元，即ち任意の回転に対して，一次元の恒等変換 E_1 を対応させるものである．これに対しては，$\mathrm{E}(s)\mathrm{E}(r) = \mathrm{E}(sr)$ なることは明瞭すぎる．その例は，二つのベクトルのスカラー積

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \tag{9.3}$$

である．3個のベクトル $\mathbf{x}_1(x_1, y_1, z_1)$，$\mathbf{x}_2(x_2, y_2, z_2)$，$\mathbf{x}_3(x_3, y_3, z_3)$ の作る平行六面体の体積を表わす行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \tag{9.4}$$

についても同様である．ただしこれは反転に対しては符号を変えるので，群 **R'** についてはスカラー積とは変換則を異にする．

ここに示した例は，いずれも何個かのベクトル成分の積，或いはその一次結合を成分とするもので，広義のテンソルと称せられるものである．これらは狭義或いは広義の回転に対してきまった一次変換を行う．一体回転群を表現する一次変換はテンソル成分の一次変換だけであろうか？またそうであったとしたら，そのようなテンソルの可能なものはどれだけあるか？という疑問が当然起って来る．

これに解答を与えるためには，まず群の一次変換による表現ということを正確に定義して置く必要がある．群 **G** の各の元 s にベクトル空間 $\mathbf{V}_n$ の正常一次変換 $\mathrm{A}(s)$ がきまった方法で対応し，その合成則が

$$\mathrm{A}(s)\mathrm{A}(r) = \mathrm{A}(sr), \tag{9.5}$$

即ち**G**の合成と全く平行して行われるとき，変換 A(s) の集合**D**を**G**の一次変換による**表現**，或いは略して **G** の表現という．表現の行われる空間 $\mathbf{V}_n$ を**表現空間**，その次元数 n を表現の**次元数**という．

(9.5) から直ちにわかるように，

$$\mathrm{A}(e)\mathrm{A}(r)=\mathrm{A}(er)=\mathrm{A}(r)$$

であるから，A(e) = E，即ち，'**G**の単位元には**D**の恒等変換が対応する.'
そうすれば，

$$\mathrm{A}(r^{-1})\mathrm{A}(r)=\mathrm{A}(e)=\mathrm{E}$$

であるから，'r の逆元に対応するものは A(r) の逆変換である'：

$$\mathrm{A}(r^{-1})=\mathrm{A}^{-1}(r)\,. \tag{9.6}$$

集合 $\mathbf{D}=\{\mathrm{A}(s)\}$ は勿論一つの群を作っている，即ち $\mathbf{L}_n$ の一つの部分群である．

前の回転群の例で，広義回転群の表現**D**として，直交変換群 $\mathbf{O}_3{}^r$ をとれば，群の元 r とこれを表現する変換 A(r) との対応は一対一である．このような表現を**忠実な表現**という．然るに表現 **D** としてベクトル積に対する変換の群をとれば，反転に対応する変換は恒等変換 E であるから：A(ι) = E，回転 r と，これに反転を合成したもの $s=\iota r$ とは，同じ行列 A(r) で表現される：

$$\mathrm{A}(s)=\mathrm{A}(\iota r)=\mathrm{A}(\iota)\mathrm{A}(r)=\mathrm{EA}(r)=\mathrm{A}(r).$$

従って **R'** の二つの元が **D** の一つの元に二対一に対応する．このような多対一の対応の極端な場合として，スカラー積 (9.3) のように，**R'** の総ての元が **D** の一つの元 E_1 に対応する，即ち **D** がただ一つの元より成る場合もある．このような多対一の忠実でない表現は '縮まった表現' とでもいうべきであろう．しかしこのときにも **D** は一つの一次群であることに違いはない．それはどのような群の忠実な表現であろうか？

これを知るため，表現**D**の単位元，即ち恒等変換 E に対応する **G** の元が幾つかあるとして，その集合を $\mathbf{N}=\{e,\ a,\ b,\ \cdots\cdots\}$ とする．$a\in\mathbf{N}$ に対しては

$\mathrm{A}(a)=\mathrm{E}$ である．**N** は単位元 e を含み，かつ $a\in\mathbf{N}$, $b\in\mathbf{N}$ とすれば，

$$\mathrm{A}(ba)=\mathrm{A}(b)\mathrm{A}(a)=\mathrm{E}, \qquad \mathrm{A}(a^{-1})\mathrm{A}(a)=\mathrm{A}(a^{-1}a)=\mathrm{E}$$

であるから，ba および a^{-1} も **N** に含まれる．従って **N** は **G** の部分群である．それればかりでなく，**G** の任意の元 s に対し，$a\in\mathbf{N}$ は

$$\mathrm{A}(s^{-1}as)=\mathrm{A}(s^{-1})\mathrm{A}(s)=\mathrm{E}$$

を満足するから，a を任意の元 s で変形したものがやはり **N** に属する．従って **N** は **G** の不変部分群である．そして，

$$\mathrm{A}(sa)=\mathrm{A}(s)\mathrm{A}(a)=\mathrm{A}(s)$$

であるから，剰余類 $s\mathbf{N}$ の元は総べて同一の変換 $\mathrm{A}(s)$ で表現される．従って‘ちぢまった表現 **D** は’ **N** の剰余類を元とする群，即ち‘**N** による **G** の因子群 **G/N** の忠実な表現である.’ 前の例で，ベクトル積に対する変換の場合は，**N** は恒等回転と反転とより成る不変部分群で，表現は **R'/N** = **R** の忠実な表現である．体積 (9.4) の方は **R'/R** 即ち恒等回転 e と反転 ι とより成る元の数が 2 個の群の忠実な表現である．群の全部の元を E_1 で表わす恒等表現は **G/G** なる単位元 1 個よりなる群の忠実な表現である．

最初に記した二階のテンソル $\mathbf{z}=\mathbf{x}_1\times\mathbf{x}_2$ に対する変換の集合は，直交変換 $\mathbf{O}_3{}^r=\mathbf{R}'$ の 9 次元の表現を作る．然るに (9.1) の 9 個の積から，その一次結合として，一次元の恒等変換をなすスカラー積：$\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$, **R** と同様の変換をなすベクトル積 $\mathbf{x}_1\times\mathbf{x}_2$ の 3 個の成分 (9.2) を作ることができる．これらはそれぞれ一次元並びに三次元の表現である．これから見ると表現は一般に，その変換の中に幾つかの‘独立な’変換を含んでいる．このことをもう少し精確にいい表わしたのが，次に述べる表現の可約性である．

表現 **D** に属する各の変換が，‘表現空間 $\mathbf{V}$ の部分空間 $\mathbf{V}'$ を不変にする,’ 即ち $\mathbf{V}'$ の中の任意のベクトルを $\mathbf{V}'$ の中のベクトルに変えるとき，**D** は**可約**であるといい，可約でない表現を**既約**であるという．‘既約’というのは，いい換えれば，‘$\mathbf{V}$ および 0 以外には不変部分空間がないことである.’

表現空間 $\mathbf{V}$ が二つの部分空間 $\mathbf{V}', \mathbf{V}''$ に分解され，表現 $\mathbf{D}$ に属する全部の変換がその各を不変にする場合には， $\mathbf{D}$ は**完全可約**であるという． $\mathbf{V}', \mathbf{V}''$ における表現を $\mathbf{D}', \mathbf{D}''$ として，このことを

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}' + \mathbf{D}'' \tag{9.7}$$

で表わす．このように表現 $\mathbf{D}$ を二つの表現の和として表わすことを，表現 $\mathbf{D}$ を**簡約**するという． $\mathbf{D}', \mathbf{D}''$ がまた完全可約であればこれを簡約し，それ以上簡約できないところでこの操作が押し進められれば，表現 $\mathbf{D}$ は

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 + \cdots\cdots + \mathbf{D}_k \tag{9.8}$$

のように既約成分 $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \cdots\cdots, \mathbf{D}_k$ の和に簡約される，(9.8) のような簡約において $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \cdots\cdots, \mathbf{D}_k$ の中には等しいものが何個かあり得ることは断るまでもあるまい．

表現空間 $\mathbf{V}$ がユニタリ空間で， $\mathbf{D}$ の元がユニタリ変換であるような表現を**ユニタリ表現**と名付ける．‘ユニタリ表現においては，可約であるとき’ 即ち部分空間 $\mathbf{V}'$ が $\mathbf{D}$ に対して不変であるときには $\mathbf{V}'$ に垂直な空間 $\mathbf{V}''$ がまた不変であるから，‘完全に可約である’．従って ‘任意のユニタリ表現は (9.8) のように既約成分の和に簡約される.’

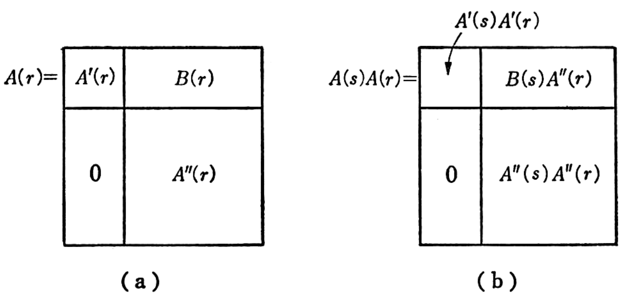
一次変換 $\mathrm{A}(s)$ はその行列 $A(s)$ で表わされるから，群 $\mathbf{G}$ の各の元 s に，行列式が 0 でない行列 $A(s)$ を

$$A(sr) = A(s)A(r) \tag{9.9}$$

なるように対応させることにより，群を表現することができる．表現条件 (9.5) を満足する行列 $A(s)$ の集合を群 $\mathbf{G}$ の**行列表現**と称する． $\mathbf{G}$ の単位元には単位行列が，逆元には逆行列が対応する．行列の次元数 n（行或いは列の数）は表現の次元数に等しい．行列表現は一次変換による表現と本質的には差違のないもので，いい表わし方が異なるだけのようなものであるから，以下一々これを区別しない．ただ変換行列 $A(s)$ は，変換 $\mathrm{A}(s)$ により一義的に定まらない，基底の選び方によって変わることは既に第2章に記した通りである，即ち，基

底を行列 S によって変換すれば，行列 $A(r)$ は $A'(r)=S^{-1}A(r)S$ に変わる，即ち行列表現 D はこれを定行列 S で変形した $\mathsf{D}'=S^{-1}\mathsf{D}S$ に変わる．これを D に**同値な表現**と称する．行列表現においては，これらの同値表現は本質的には同じものと考えて，区別しないことにする．（ベクトル成分（$x_1, x_2, \cdots\cdot, x_n$）が，基底を変えて（$\xi_1, \xi_2, \cdots\cdot, \xi_n$）となっても，これを同一ベクトル $\mathbf{x}$ と考えるのと同じことである．）

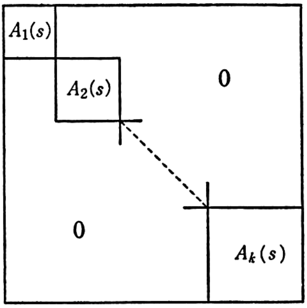
表現 D が可約であるときには，不変部分空間 $\mathbf{V}'$ の基底を表現空間の最初の n' 個の基底にとれば，表現行列は第28図(a)のような形になる．この場合 $A'(r)$ が表現空間 $\mathbf{V}'$ における表現行列になることは勿論であるが，$A''(r)$ も商空間 $\mathbf{V}/\mathbf{V}'$ における表現の表現行列である．事実これが表現条件を満足することは第28図(b)からも確められる．



第 28 図

表現 D が $\mathsf{D}'+\mathsf{D}''$ に簡約されるときには，その表現行列の形は，第28図(a)において，$B(r)=0$ としたものになる．即ち D の表現行列は，D' および D'' の表現行列を対角線に沿うて階段状に並べたものになる．逆に二つの表現 $\mathsf{D}', \mathsf{D}''$ の表現行列を階段状に並べて一つの表現 D を作ることができる（‘表現の加え算’）．そのままでは如何にも二つのものをただ一緒に書いただけのようであるが，これに基底の変換をしてしまえば，行列はこの特殊な形を失うから，一見しただけで可約かどうかはわからなくなる，D が既約成分 $\mathsf{D}_1, \mathsf{D}_2, \cdots\cdot, \mathsf{D}_k$ に簡約されるときには，その表現行列 $A(s)$ は第29図のように，対

角線に沿うて既約表現の行列が k 個並び，他の成分が悉く 0 であるものと同値である.



第 29 図

二つの表現 **D**, **D**′ に対する表現空間 **V**, **V**′ の積空間 **V** × **V**′ における変換がまた一つの表現になることは (8.10) から明かである. これを表現 **D**, **D**′ の**積表現**といい，**D** × **D**′ で表わす.

D, **D**′ が既約表現であっても，**D** × **D**′ は必ずしも既約とは限らない. 既に述べたように二階テンソルの中にはスカラー積や，ベクトル積のような既約成分を含む. これらのことの詳細は，もう少し回転群の表現の具体的のことを知った上で論ずることにしよう.

表現 **D** の表現行列は，表現空間の基底を行列 S により変換すれば，

$$S^{-1}A(r)S = A'(r)$$

に変わることは前に記した. そこで異なる二つの基底に対する既約表現行列が一致する : $A'(r) = A(r)$ のための条件を求めよう. これは即ち

$$A(r)S = SA(r), \qquad r \in \mathbf{G} \tag{9.10}$$

なる S を求めること，いい換えれば，既約表現 **D** の総べての表現行列と可換な行列を求めることに相当する.

表現空間 $\mathbf{V}_n$ における変換 S の固有値を σ とすれば，

$$S\mathbf{u} = \sigma\mathbf{u} \tag{9.11}$$

を満足するベクトル $\mathbf{u}$ ($\neq 0$) が存在することは既に度々記したことである. (9.11) の左から $A(r)$ を合成して，(9.10) を用いれば，

$$A(r)S\mathbf{u} = SA(r)\mathbf{u} = \sigma A(r)\mathbf{u},$$

よってベクトル $A(r)\mathbf{u}$ は変換 S によりその σ 倍になる. 然るに **D** は既約であるから，$\mathbf{V}_n$ のあらゆるベクトル $\mathbf{x}$ は $A(r)\mathbf{u}$ ($r \in \mathbf{G}$) の一次結合として表わされる. 従って，$\mathbf{V}_n$ の任意のベクトル $\mathbf{x}$ に対して

$$S\mathbf{x}=\sigma\mathbf{x}$$

が成立つ，‘即ち既約表現行列の総べてと交換可能な行列は単位行列の定数倍である.’ これを **Schur の補題**と称し，表現論においてしばしば用いられる重要な定理である.

§10.　回転群の表現

さて，いよいよ回転群の表現を作り，その既約成分を求める問題にとりかかろう．そのためには，二つの回転 r, s に対して，

$$\mathrm{A}(s)\mathrm{A}(r)=\mathrm{A}(sr) \tag{10.1}$$

の関係を満足する変換，具体的には表現行列 $A(r)$ を求めればよい．ところが，回転群の元 r の数が連続無限であって，かつ r を3個のパラメタで表わしたときに，その合成則を解析的に表わす式は簡単でないから，(10.1) を函数方程式として解いて，行列 $A(r)$ を求めることは容易でない．ここでは，むしろ r の連続性を利用して，まず無限小回転に対する表現行列を求め，次にこれを積分して有限回転に対するものを求めるのが得策である．というのは，次に示すように，無限小回転に対しては群元の合成を無限小パラメタの加え算で実現することができるからである．そこでまず無限小回転の説明を与えよう．

一点 O を固定した剛体の変位は，或る方向 (α, β, γ) の有限角 ω の回転であることは既に記したが，この有限変位を，各瞬間における (α, β, γ) の方向の角速度 $\mathbf{o}$ の回転運動を，有限時間続けて行ったものとして実現することができる．このような運動において剛体の一点 P の持つ速度 $\mathbf{v}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\mathbf{x}$ として，

$$\mathbf{v}=\mathbf{o}\times\mathbf{x} \tag{10.2}$$

で表わされることは，よく知られている.

時刻 $t=0$ に $\mathbf{x}$ にあった剛体の一点 P が，時刻 t に $\mathbf{x}'$ に移って来たとすれば，$\mathbf{x}\to\mathbf{x}'$ の回転は

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} \tag{10.3}$$

なる変換で与えられる．ただし $A(t)$ は時刻 t における剛体の回転を表わす行列である．よって時刻 $t=0$ における剛体の速度は

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \dot{A}(0)\mathbf{x} = D\mathbf{x}, \qquad D = \dot{A}(0) \tag{10.4}$$

で与えられる．$A(t)$ は直交行列であるから $A^*A = E$. よって $\dot{A}^*A + A^*\dot{A} = 0$. かつ $t=0$ では (10.3) は $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$, 従って $A(0) = A^*(0) = E$ であるから，

$$D^* + D = 0, \qquad D^* = -D. \tag{10.5}$$

よって，(10.4) の $\mathbf{x} \to \mathbf{v}$ なるベクトルの一次変換に対する行列 'D は反対称行列' であることがわかる：

$$d_{jk} = -d_{kj}. \qquad (k,\ j = 1,\ 2,\ 3) \tag{10.6}$$

その独立な成分は d_{23}, d_{31}, d_{12} の 3 個である．

(10.4) の一次変換 $\mathrm{D}: \mathbf{x} \to \mathbf{v}$ を '無限小回転' という．それは (10.6) なる反対称行列によって表わされる．(10.4) を具体的にかけば $\mathbf{x} = (x, y, z)$ として，

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \phantom{-d_{12}x} \qquad d_{12}y - d_{31}z, \\ \frac{dy}{dt} &= -d_{12}x \qquad\quad + d_{23}z, \\ \frac{dz}{dt} &= d_{31}x - d_{23}y \end{aligned}\right\} \tag{10.7}$$

である．そこで，

$$o_x = -d_{23}, \qquad o_y = -d_{31}, \qquad o_z = -d_{12} \tag{10.8}$$

とおけば，(10.7) は (10.2) と一致する．三次元の反対称行列は回転に対してベクトルと同じ変換性を持つから，行列 D をベクトル $\mathbf{o}(o_x, o_y, o_z)$ を以って表わし得るのは当然である．即ち，'反対称行列 D の集合 $\mathbf{I}$ は三次元ベクトル空間 $\mathbf{V}_3{}^r$ と本質的にちがわない.' その基底として

$$D_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_z = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{10.9}$$

をとれば，任意の $D \in \mathbf{I}$ は

$$D = o_x D_x + o_y D_y + o_z D_z \tag{10.10}$$

で表わされる．(D_x, D_y, D_z は $\mathbf{V}_3{}^r$ の基底 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ に相当する．)

Dを‘無限小回転の行列，’或いは略して単に‘無限小回転’と呼び，D_x, D_y, D_z をそれぞれ‘x-, y-, z-軸のまわりの無限小回転’という．これらはそれぞれ x-, y-, z-軸のまわりの角速度1の回転運動に相当する．

‘二つの無限小回転 D_1, D_2 の合成は，’角速度ベクトルの合成則：$\mathbf{o} = \mathbf{o}_1 + \mathbf{o}_2$ [(2.3)] に対応して，

$$D = D_1 + D_2 \tag{10.11}$$

即ち‘$\mathbf{I}$ におけるベクトル (10.10) の加え算で与えられる．’

無限小回転から有限の回転を得るには，角速度 $\mathbf{o}$ の回転 (10.7) を，適当な時間：$t=0$ から $t=t$ まで積分すればよい．(10.7) を積分して回転 $r(\omega\,;\alpha,\beta,\gamma)$ に相当する変換を求めるのには，回転軸を最初から α, β, γ の方向に固定し，$|\mathbf{o}|$ を一定にして積分するのが簡単である．かつ回転に要する時間の遅速は問題でないから，$|\mathbf{o}| = 1$ として差支ない．そうすれば α, β, γ は $\mathbf{o}$ の成分 o_x, o_y, o_z と一致する．よって，解くべき微分方程式は

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \qquad\; -\gamma y + \beta z, \\ \frac{dy}{dt} &= \gamma x \qquad\; - \alpha z, \\ \frac{dz}{dt} &= -\beta x + \alpha y \end{aligned}\right\} \tag{10.12}$$

となり定数係数の連立一次微分方程式である．この方程式は，よく知れているように，$x=C_1e^{\lambda t}$, $y=C_2e^{\lambda t}$, $z=C_3e^{\lambda t}$ とおいて解くことができる．そして初期条件 $t=0$ で $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0(x_0, y_0, z_0)$ とすれば，解 $\mathbf{x}(x, y, z)$ は $\mathbf{x}_0$ について一次的で $\mathbf{x}=A\mathbf{x}_0$ の形をしている．その係数行列は t, α, β, γ について解析函数である．ここに t は，$|\mathbf{o}|=1$ の仮定により，回転角 ω と一致する．このようにして，有限角 ω の回転 $r(\omega\,;\,\alpha,\,\beta,\,\gamma)$ に対する変換行列 $A(t)=A(r)$ が方程式 (10.12) の解として求められる．

$$\text{(10.12)}:\qquad \frac{d\mathbf{x}}{dt}=D\mathbf{x} \tag{10.13}$$

を行列の形で直接解くには次のようにする．最初右辺の $\mathbf{x}$ に初期値 $\mathbf{x}_0$ を代入すれば，$t=0$ で $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0$ の条件を入れて，

$$\mathbf{x}_1=\mathbf{x}_0+tD\mathbf{x}_0.$$

この $\mathbf{x}_1$ を，再び (10.13) の右辺に代入すれば，

$$\mathbf{x}_2=\mathbf{x}_0+tD\mathbf{x}_0+\frac{1}{2}t^2D^2\mathbf{x}_0.$$

このような逐次近似を繰り返せば，

$$\mathbf{x}=\left(E+tD+\frac{1}{2}t^2D^2+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}t^nD^n+\cdots\cdots\right)\mathbf{x}_0$$

が得られる．行列 A に対して

$$e^A=E+A+\frac{1}{2}A^2+\cdots\cdots+\frac{1}{m!}A^m+\cdots\cdots=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}A^m$$
$$(A^0=E) \tag{10.14}$$

と定義すれば，これは

$$\mathbf{x}=e^{tD}\mathbf{x}_0 \tag{10.15}$$

と書かれる．即ち回転 $\mathbf{x}=A(t)\mathbf{x}_0$ に対する変換行列は

$$A(t)=e^{tD} \tag{10.16}$$

で与えられることが予想される．

証明．まず級数 (10.16) が収束することは次のようにしてわかる．

行列 $A=(a_{ik})$ の絶対値を

$$|A|^2=\sum_{i,k}|a_{ik}|^2=\mathrm{Sp}(\tilde{A}A)$$

で定義する．これは a_{ik} $(i,\ k=1,\ 2,\cdots\cdots,\ n)$ を $\mathbf{V}_{n^2}$ のベクトル成分と考えたときのベクトル A の絶対値である．そうすれば，ベクトルの絶対値につきよく知れた不等式

$$|A+B|\leqq|A|+|B|,$$

$$|AB|\leqq|A|\cdot|B| \quad (\text{Schwarz の不等式})$$

により，

$$|e^A|\leqq\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}|A^m|\leqq\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}|A|^m=e^{|A|}.$$

したがって (10.16) で与えられる行列 $A(t)=(a_{ik}(t))$ は $|t|<\infty$ に対し収束する．よって，

$$e^{tD}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}D^m$$

は項別に微分できて，

$$\frac{d}{dt}(e^{tD})=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}D^m=D\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}D^m=De^{tD}$$

である (証明了).

なお，行列の指数函数について，

$$e^{(t_1+t_2)A}=e^{t_1A}e^{t_2A}$$

が成立つことが示される．従って

$$A(t_1)A(t_2)=A(t_1+t_2) \tag{10.17}$$

よって $A(t)$ で示される変換は，そのパラメタ t につき加算的である．(可換群を作っている．) $A(t)$ は，回転の方向 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を固定した **R** の部分群 (二次元回転群，パラメタ空間 **S** で半径上の点で表わされる元の集合) である．このことを示すためには回転軸の方向 α を明記して，$A(t)$ を $A_\alpha(t)$ と書いたほ

うがよい. α をあらゆる方向にとることにより, R の全部の変換が得られる.

以上のような考えによれば, 無限小回転 D は三次元ベクトル空間を作っていることだけで話が済みそうであるが, 実はもう少し立入った考察が必要である. これによって回転群の構造を示す重要な関係式が得られる.

D は行列の集合であるから, ベクトルとしての加え算（および数の掛け算）のほかに, 掛け算ができる. しかし, $D_1, D_2 \in \mathbf{I}$ として, D_1D_2 は必ずしも $\mathbf{I}$ に属しない. というのは反対称行列の積は反対称とは限らないからである. ところが, A を任意の行列として, $A - A^*$ は必ず反対称である. かつ, $(D_1D_2)^* = D_2^*D_1^* = D_2D_1$ であるから, $[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1$ は $\mathbf{I}$ に属する.

(10.9) で示した基底につきこの関係を求めれば, 直接計算して,

$$\left.\begin{aligned} &D_yD_z - D_zD_y = D_x, \qquad D_zD_x - D_xD_z = D_y, \\ &D_xD_y - D_yD_x = D_z \end{aligned}\right\} \tag{10.18}$$

であることがわかる. この関係を用いて, $D_1 = a_xD_x + a_yD_y + a_zD_z$, $D_2 = b_xD_x + b_yD_y + b_zD_z$ について $D_1D_2 - D_2D_1$ を作れば,

$$[D_1, D_2] = (a_yb_z - a_zb_y)D_x + (a_zb_x - a_xb_z)D_y + (a_xb_y - a_yb_x)D_z \tag{10.19}$$

となり, ベクトル $\mathbf{a}(a_x, a_y, a_z)$ と $\mathbf{b}(b_x, b_y, b_z)$ とからベクトル積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ を作る掛け算に相当する.

次に $D_1D_2 - D_2D_1$ がどのような回転の無限小変換の行列になっているかを考えてみよう. α, β, γ 方向の角 t の回転 r の行列を $A(t) = A_\alpha(t)$, α', β', γ' 方向の角 t の回転 s の行列を $B(t) = A_{\alpha'}(t)$, $\dot{A}(0) = D_1$, $\dot{B}(0) = D_2$ とする. $r, s \in \mathsf{R}$ だから, その‘交換子’ $p = rsr^{-1}s^{-1}$ も R に属する. 回転 p の行列は, $C(t) = A(t)B(t)A^{-1}(t)B^{-1}(t)$ であるから, 次の関係を満足する:

$$A(t)B(t) = C(t)B(t)A(t). \tag{10.20}$$

そこで $t = 0$ とおけば, $A(0) = B(0) = E$ だから, $C(0) = E$. 次にこれを微分して $t = 0$ とおけば,

$$\dot{A}(0) + \dot{B}(0) = \dot{C}(0) + \dot{B}(0) + \dot{A}(0).$$

よって $\dot{C}(0) = 0$. 更にもう一度微分して $t = 0$ とおけば,

$$\ddot{A}(0) + 2\dot{A}(0)\dot{B}(0) + \ddot{B}(0)$$
$$= \ddot{C}(0) + \ddot{B}(0) + \dot{B}(0)\dot{A}(0) + \dot{B}(0)\dot{A}(0) + \ddot{A}(0).$$

これから

$$\ddot{C}(0) = 2[\dot{A}(0)\dot{B}(0) - \dot{B}(0)\dot{A}(0)]$$

を得る. したがって,

$$C(t) = E + (D_1D_2 - D_2D_1)t^2 + \cdots.$$

そこで $t^2 = u$ を新しいパラメタにとれば, 回転 p に対する無限小変換が,

$$\frac{d\mathbf{x}}{du} = (D_1D_2 - D_2D_1)\mathbf{x}$$

であることがわかる.

さて, 次に表現空間 $\mathbf{V}$ に移れば, これに属するベクトル $\mathbf{x}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は, 回転 r に対して変換 $\mathbf{x} \to \mathbf{x}'$:

$$\mathbf{x}' = A(r)\mathbf{x}$$

を受ける. $A(r)$ は r に対する表現行列である. $r = r(t, \alpha)$ が '時間' t の函数であるときには, $\mathbf{x}'$ の時間的変化の割合, 即ち表現空間における点 $\mathbf{x}'$ の速度は

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{A}(0)\mathbf{x} = R\mathbf{x}$$

で与えられる. $R = \dot{A}(0)$ は無限小回転の表現行列と呼ばれる. 無限小回転 D に対応する表現行列を R とすれば cD には cR が対応する. また D_1, D_2 に対応する表現行列を R_1, R_2 とすれば, $D_1 + D_2$ には $R_1 + R_2$ が対応するから, R の集合は D の集合 $\mathbf{I}$ と線形的に同型である. したがって, D_x, D_y, D_z に対応する3個の基底 R_1, R_2, R_3 があって, 任意の R はその一次結合として表わされる. 基底 R_1, R_2, R_3 の間には, (10.18) に対応する

$$R_2R_3 - R_3R_2 = R_1, \quad R_3R_1 - R_1R_3 = R_2, \quad R_1R_2 - R_2R_1 = R_3 \qquad (10.21)$$

の関係が成立つ．また (α, β, γ) 方向の角速度 1 の無限小回転に対しては，表現空間では

$$R = \alpha R_1 + \beta R_2 + \gamma R_3 \tag{10.22}$$

なる行列が対応する．従って

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = R\mathbf{x} = (\alpha R_1 + \beta R_2 + \gamma R_3)\mathbf{x}, \tag{10.23}$$

或いは成分で書いて（$\overset{(\lambda)}{R}_{ik}$ は R_λ $(\lambda = 1, 2, 3)$ の行列成分）

$$\frac{dx_i}{dt} = \left\{\alpha \sum_k \overset{(1)}{R}_{ik} + \beta \sum_k \overset{(2)}{R}_{ik} + \gamma \sum_k \overset{(3)}{R}_{ik}\right\} x_k \tag{10.24}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

を $t = 0$ で $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$，即ち $x_1 = x_1{}^0$, $x_2 = x_2{}^0$, $\cdots$, $x_n = x_n{}^0$ の条件で積分して $\mathbf{x} = A(t)\mathbf{x}_0$ を求めれば，$r = (\omega\,;\, \alpha, \beta, \gamma)$ に対応する表現行列 $A(r) = (a_{ik}(r))$ が，$\omega = t$, α, β, γ の解析函数として求められる．或いは (10.16) に対応して

$$\mathbf{x} = e^{tR}\mathbf{x}_0, \qquad A(r) = e^{tR} \tag{10.25}$$

という形に，具体的に $r(t\,;\, \alpha, \beta, \gamma)$ の表現行列が表わされる．

このようにして，各の回転 r に対して表現行列 $A(r)$ が，パラメタ空間の各点に対して，連続的，一義的に定まるように見えるが，必ずしもそうはゆかない．というのは，球面 $\mathbf{S}$ の上の点に対しては，直径の両端が同一点であるにもかかわらず，(α, β, γ) に対して (10.23) を積分したものと $(-\alpha, -\beta, -\gamma)$ に対して積分したものとが $t = \pi$ で同じになるという保証はない．ところが連続群の表現としては，$A(s)A(r) = A(sr)$ の関係が，r, s につき連続であることが要求される．よって，上に $0 \leqq t \leqq \pi$ の変域で積分したものだけでは不十分で，$t = \pi$ の値に連続する表現を求めるためには t につきもっと先まで積分することが必要になる．これは前に，恒等回転から連続的に回転 r に到達するのに本質的に異なる二つの道があるといったことに対応している．この二つの別の道を辿ったときに表現行列は必ずしも同一の価になると限らない，

$P=(\pi,\alpha,\beta,\gamma)$ から出発して（例えば直径に沿うた）閉曲線を描いて $P'=(\pi,-\alpha,-\beta,-\gamma)=P$ に戻ったとき，表現行列がもとの値に戻らないことは，複素平面上 $x>0$ から出発して原点を一周したとき $z^{1/2}$ がもとの値に戻らないで，他の Riemann 面上の値に連続しているのに似ていて，P, P$'$ における値は $t>\pi$ に積分したものにつながっている．これは即ち $\mathbf{S}_1$ 空間につながっていることを意味する．この空間が $\mathbf{S}$ と $\mathbf{S}_1$ とで足りる，即ち表現が $\mathbf{S}$ と $\mathbf{S}_1$ とを表面でつないで重ねた二重空間で一価である，或いは上記の微分方程式の解が $t=2\pi$ でもとへ戻ることは，上の考察からもっともらしいが，その証明は後に示す．

次に実際に回転群の表現を決定する問題に移ろう．それには，上記したように，無限小回転に対応する行列 R_1, R_2, R_3 をきめればよいのであるが，その代りに，それらの一次結合

$$\left.\begin{aligned} A&=iR_1+R_2,\\ B&=-\frac{1}{2}(iR_1-R_2),\\ C&=iR_3 \end{aligned}\right\} \tag{10.26}$$

を用いる方が便利である．これらの間の交換関係は，(10.21) により，

$$AB-BA=C,\ \ AC-CA=A,\ \ BC-CB=-B \tag{10.27}$$

となり，前のものに較べると，第二，第三にはそれぞれ A, C; B, C だけが含まれている点で都合がよい．

まず既約表現 $\mathbf{D}$ を定めることから始める．λ を行列 C の固有値とすれば，表現空間に $C\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$ を満足するベクトル $\mathbf{x}$ が存在する．(10.27) から，

$$CA\mathbf{x}=AC\mathbf{x}-A\mathbf{x}=(\lambda-1)A\mathbf{x},$$

$$CB\mathbf{x}=BC\mathbf{x}+B\mathbf{x}=(\lambda+1)B\mathbf{x}$$

を得るから，$A\mathbf{x}$ が 0 でなければ，$\lambda-1$ が C の固有値であり，$B\mathbf{x}$ が 0 でなければ $\lambda+1$ が C の固有値である．そこで λ を C の最大の固有値とする．もっとも，λ は複素数かも知れないが，その場合には実数部分が最大の固有値と

する．そうすれば $\lambda+1$ はもはや固有値ではないから，$B\mathbf{x}=0$ である．即ち，このような固有値 λ に対しては，

$$C\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}, \qquad B\mathbf{x}=0$$

の関係が成立つ．これから，交換関係 (10.27) により，

$$CA\mathbf{x}=(\lambda-1)A\mathbf{x}, \qquad BA\mathbf{x}=AB\mathbf{x}-C\mathbf{x}=-\lambda\mathbf{x}$$

が得られる．これから更に

$$\begin{aligned} CA^2\mathbf{x} &= CAA\mathbf{x}=(AC-A)A\mathbf{x} \\ &= ACA\mathbf{x}-A^2\mathbf{x}=(\lambda-2)A^2\mathbf{x}, \\ BA^2\mathbf{x} &= ABA\mathbf{x}-CA\mathbf{x}=(1-2\lambda)A\mathbf{x}, \end{aligned}$$

一般に

$$CA^p\mathbf{x}=(\lambda-p)A^p\mathbf{x}, \qquad BA^p\mathbf{x}=p\left(\frac{p-1}{2}-\lambda\right)A^{p-1}\mathbf{x} \tag{10.28}$$

が成立つことが証明される．(数学的帰納法を用いて容易に確められる．) 表現空間の次元数は有限であるから，$\mathbf{x}$, $A\mathbf{x}$, $A^2\mathbf{x}, \cdots\cdots$ を順次作って行けば，いつかは $A^{p+1}\mathbf{x}$ が $\mathbf{x}$, $A\mathbf{x}$, $A^2\mathbf{x}, \cdots\cdots, A^p\mathbf{x}$ の一次結合になるような整数 p が必ず存在する．この中で '最小のもの' を p とすれば，

$$A^{p+1}\mathbf{x}=a_0\mathbf{x}+a_1A\mathbf{x}+a_2A^2\mathbf{x}+\cdots\cdots+a_pA^p\mathbf{x} \tag{10.29}$$

の関係が成立つ．この式の左から B を掛ければ，(10.28) の第二式により，

$$\begin{aligned} &(p+1)\left(\frac{p}{2}-\lambda\right)A^p\mathbf{x} \\ &\quad =-a_1\lambda\mathbf{x}+a_2(1-2\lambda)A\mathbf{x}+\cdots\cdots+a_pp\left(\frac{p-1}{2}-\lambda\right)A^{p-1}\mathbf{x} \end{aligned}$$

を得る．p が (10.29) を成立たせる最小整数であるという仮定により，$\mathbf{x}$, $A\mathbf{x}$, $\cdots\cdots$, $A^p\mathbf{x}$ の間には一次的関係がないから，これから

$$p=2\lambda, \qquad a_1=a_2=\cdots\cdots=a_p=0 \tag{10.30}$$

を得る．よって，(10.29) の中で残るのは

$$A^{p+1}\mathbf{x}=a_0\mathbf{x}$$

だけとなる．これに C を左から掛ければ，左辺は (10.28) の第一式から

$$(\lambda-p-1)A^{p+1}\mathbf{x}=(\lambda-p-1)a_0\mathbf{x}.$$

右辺は $a_0C\mathbf{x}=a_0\lambda\mathbf{x}$ であるから，$a_0(\lambda-p-1)=a_0\lambda$，或いは $a_0(p+1)=0$. 従って，$p\geqq 0$ であるから，$a_0=0$ を得る．故に

$$A^{p+1}\mathbf{x}=0,\qquad \lambda=p/2 \tag{10.31}$$

であることがわかった．

このようにして $p+1$ 個の独立なベクトル $\mathbf{x}, A\mathbf{x}, \cdots, A^p\mathbf{x}$ は無限小回転により相互の間で変換される．従って有限の回転にしても同様である．よってここに得られた表現は既約で，その次元数は $p+1$ である．この表現は整数 p により完全に決定される．何となれば，無限小回転 A, B, C に対して，この $p+1$ 個のベクトル

$$\mathbf{u}_0=\mathbf{x},\quad \mathbf{u}_1=A\mathbf{x},\quad \mathbf{u}_2=A^2\mathbf{x},\quad \cdots,\quad \mathbf{u}_p=A^p\mathbf{x}$$

は，p により定まる次のような変換をなすからである：

$$\left.\begin{aligned}
&A\mathbf{u}_0=\mathbf{u}_1,\quad A\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_2,\quad A\mathbf{u}_2=\mathbf{u}_3,\quad \cdots,\quad A\mathbf{u}_r=\mathbf{u}_{r+1},\\
&\qquad \cdots,\quad A\mathbf{u}_p=0,\\
&B\mathbf{u}_0=0,\quad B\mathbf{u}_1=-\frac{p}{2}\mathbf{u}_0,\quad B\mathbf{u}_2=(1-p)\mathbf{u}_1,\quad \cdots,\\
&\qquad B\mathbf{u}_r=\left(\frac{r(r-p-1)}{2}\right)\mathbf{u}_{r-1},\quad \cdots,\quad B\mathbf{u}_p=-\frac{p}{2}\mathbf{u}_{p-1},\\
&C\mathbf{u}_0=\frac{p}{2}\mathbf{u}_0,\quad C\mathbf{u}_1=\left(\frac{p}{2}-1\right)\mathbf{u}_1,\quad C\mathbf{u}_2=\left(\frac{p}{2}-2\right)\mathbf{u}_2,\\
&\qquad \cdots,\quad C\mathbf{u}_r=\left(\frac{p}{2}-r\right)\mathbf{u}_r,\quad \cdots,\quad C\mathbf{u}_p=-\frac{p}{2}\mathbf{u}_p.
\end{aligned}\right\} \tag{10.32}$$

この表現の構成法からわかるように，きまった次元数 $p+1$ の既約表現はここに与えた一通りのものしか存在しない．ここに得られた既約表現を $p/2=j$ として D_j または $\mathsf{D}(j)$ と記す．j は整数或いは半整数 $j=0, 1/2, 1, 3/2, 2, \cdots\cdots$ の値が可能である．

行列 A, B, C の具体的の形は，(10.32) からわかるように*，$\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_p$

* 基底の変換とベクトル成分の変換行列との関係に注意．

を基底として,

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots\cdot & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots\cdot & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots\cdot & 0 & 0 \\ \cdots\cdot & & \cdots\cdot & & \cdots\cdot \\ 0 & 0 & \cdots\cdot & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} 0 & -j & 0 & \cdots\cdot & 0 \\ 0 & 0 & -2j+1 & \cdots\cdot & 0 \\ \cdots\cdot & \cdots\cdot & \cdots\cdot & & \cdots\cdot \\ 0 & 0 & \cdots\cdot & \cdots\cdot & -j \\ 0 & 0 & \cdots\cdot & \cdots\cdot & 0 \end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix} j & 0 & 0 & \cdots\cdot & 0 \\ 0 & j-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & j-2 & \cdots\cdot & 0 \\ \cdots\cdot & \cdots\cdot & \cdots\cdot & & \cdots\cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdot & -j \end{bmatrix} \tag{10.33}$$

である. B の 0 でない成分 $(k, k+1)$ は $k(k-(2j+1))/2$ である.

このようにして, 回転群の既約表現 $\mathbf{D}_j$ が求められたから, 次には任意の可約な表現 $\mathbf{D}$ に移って考える. この表現において, 行列 C の最大の固有値を $p/2$ とすれば, これに対して, 既述の表現 $\mathbf{D}_{p/2}$ の基底である $\mathbf{u}$, $A\mathbf{u}$, $\cdots\cdot$, $A^p\mathbf{u}$ なる $p+1$ 個の独立なベクトルが存在する. この外に C の固有値 $p/2$ に属する $\mathbf{u}$ と独立なベクトル $\mathbf{v}$ があるとすれば, これから同様の論法で $\mathbf{v}$, $A\mathbf{v}$, $\cdots\cdot$, $A^p\mathbf{v}$ なる $p+1$ 個の, 同じく相互の間だけで変換される既約表現の基底を作ることができる. このようにして, C の固有値 $p/2$ に属する独立なベクトルを次次と見出して行って, h 組のベクトルが得られたとする. この $h(p+1)$ 個の基底:

$$\begin{array}{llll} \mathbf{u}_0=\mathbf{u}, & \mathbf{u}_1=A\mathbf{u}, & \cdots\cdot, & \mathbf{u}_p=A^p\mathbf{u}, \\ \mathbf{v}_0=\mathbf{v}, & \mathbf{v}_1=A\mathbf{v}, & \cdots\cdot, & \mathbf{v}_p=A^p\mathbf{v}, \\ \cdots\cdot & \cdots\cdot & \cdots\cdot & \cdots\cdot \\ \mathbf{w}_0=\mathbf{w}, & \mathbf{w}_1=A\mathbf{w}, & \cdots\cdot, & \mathbf{w}_p=A^p\mathbf{w} \end{array}$$

が一次的に独立であることは殆んど自明と思われるが, 次のようにして直接証

明される．これらの間に一次関係

$$\begin{aligned} & a_0\mathbf{u}_0 + a_1\mathbf{u}_1 + \cdots\cdot + a_p\mathbf{u}_p \\ & + b_0\mathbf{v}_0 + b_1\mathbf{v}_1 + \cdots\cdot + b_p\mathbf{v}_p \\ & + \cdots\cdot \quad \cdots\cdot \quad \cdots\cdot \quad \cdots\cdot \\ & + c_0\mathbf{w}_0 + c_1\mathbf{w}_1 + \cdots\cdot + c_p\mathbf{w}_p = 0 \end{aligned} \tag{10.34}$$

が存在するとして，この左から B を掛ければ，

$$\begin{aligned} & -\frac{p}{2}a_1\mathbf{u}_0 - \cdots\cdot \qquad -\frac{p}{2}a_p\mathbf{u}_{p-1} \\ & -\frac{p}{2}b_1\mathbf{v}_0 - \cdots\cdot \qquad -\frac{p}{2}b_p\mathbf{v}_{p-1} \\ & \cdots\cdot \qquad \cdots\cdot \qquad\qquad\qquad = 0 \end{aligned}$$

となる．これに更に次々と B を掛けて行けば，p 回の後には

$$\text{Const.} \times \{a_p\mathbf{u}_0 + b_p\mathbf{v}_0 + \cdots\cdot + c_p\mathbf{w}_0\} = 0 \tag{10.35}$$

となる．然るに仮定により $\mathbf{u}=\mathbf{u}_0$, $\mathbf{v}=\mathbf{v}_0, \cdots\cdot$, $\mathbf{w}=\mathbf{w}_0$ は一次的に独立であるから，

$$a_p = b_p = \cdots\cdot = c_p = 0.$$

この結果を用いれば (10.35) を得るも一つ手前，即ち (10.34) に B^{p-1} を掛けたものは

$$\text{Const.} \times \{a_{p-1}\mathbf{u}_0 + b_{p-1}\mathbf{v}_0 + \cdots\cdot + c_{p-1}\mathbf{w}_0\} = 0$$

となり，これから

$$a_{p-1} = b_{p-1} = \cdots\cdot = c_{p-1} = 0$$

を得る．このようにして，次々と (10.34) に $B^{p-2}, \cdots\cdot, B$ を掛けた結果に戻って行けば，順次

$$a_{p-k} = b_{p-k} = \cdots\cdot = c_{p-k} = 0 \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdot)$$

が得られ，最後に (10.34) から

$$a_0 = b_0 = \cdots\cdot = c_0 = 0$$

なることがわかる (証明了)．これら $h(p+1)$ 個の独立なベクトルの張る空間

を $\mathbf{V}_1'$ とする.

表現空間 $\mathbf{V}$ の次元数を $h(p+1)$ より大であるとし, $\mathbf{V}_1'$ に属しない C の固有ベクトルがまだ在るとしよう. その中で最大の固有値を $q/2$ とする. p が最大の仮定により $q<p$ である. そこで $C\mathbf{s}=\frac{q}{2}\mathbf{s}$ を満足するベクトル $\mathbf{s}$ を考えると, $B\mathbf{s}$ は固有値 $\frac{q}{2}+1$ に属するから, $\mathbf{V}_1'$ に属する. これは $\mathbf{V}_1'$ に属する固有値 $\frac{q}{2}$ のベクトル $\mathbf{t}$ に B を施して得られる: $B\mathbf{s}=B\mathbf{t}$, よって $\mathbf{V}_1'$ に属しない $\mathbf{s}-\mathbf{t}$ に対しては $B(\mathbf{s}-\mathbf{t})=0$ となる. 結局, $\mathbf{s}-\mathbf{t}$ の代りに $\mathbf{s}$ と記せば, $\mathbf{V}_1'$ に属しないで,

$$C\mathbf{s}=\frac{q}{2}\mathbf{s}, \qquad B\mathbf{s}=0$$

を満足するベクトル $\mathbf{s}$ が存在する. そうすれば前と同じ方法で, $\mathbf{s}$, $A\mathbf{s}$, $\cdots$, $A^q\mathbf{s}$ なる $q+1$ 個の既約表現 $\mathbf{D}_{q/2}$ の基底をなすベクトルが求められる. このような基底が k 組あるとしよう.

このようにして続けて行けば, 回転により既約的に変換されるベクトルの集合より成る空間 $\mathbf{V}'$ が得られる. $\mathbf{V}'$ における表現は完全可約である. そして C の全部の固有ベクトルが $\mathbf{V}'$ に含まれている. そこで若し $\mathbf{V}'$ と $\mathbf{V}$ とが一致するならば, 表現は完全可約であることがいえるわけである.

これを証明するために,今までと記号を変えて, $\mathbf{V}'$ の基底を $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\cdots$, $\mathbf{e}_r$ と記す. これらは全部行列 C の固有ベクトルである: $C\mathbf{e}_i=\lambda_i\mathbf{e}_i$. ただし λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_r の中には等しいものが沢山あるから, それらの中固有値の異なるものだけに着目するときには, これを $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, $\cdots$ と記し, この各の固有空間 $\mathbf{V}'(\lambda^{(\alpha)})$ に属する基底を $\mathbf{e}_1^{(\alpha)}$, $\mathbf{e}_2^{(\alpha)}$, $\cdots$, $\mathbf{e}_\sigma^{(\alpha)}$ と二重に添字をつけて表わすことにしよう. 固有値 $\lambda^{(\alpha)}$ は整数または半整数で, $\lambda^{(\alpha)}$ が固有値であれば $-\lambda^{(\alpha)}$ も固有値である. また $\lambda^{(\alpha)}\geqq 1$ であれば, $\mathbf{V}'(\lambda^{(\alpha)})$ に属するベクトルは, $\mathbf{V}'(\lambda^{(\alpha)}-1)$ に属するベクトルに行列 B を掛けることにより得られる.

言いたいことは $\mathbf{V}'$ の次元数 ν が $\mathbf{V}$ の次元数 n に等しいことであるから,

$\nu < n$ とすれば矛盾に逢着することをいえばよい．そこで $\mathbf{V}$ のベクトルの $\mathbf{V}'$ の中での差異を問題にしない，或いは二つのベクトルの差が $\mathbf{V}'$ の中にあるときは，これを等しいベクトルと見る，即ち $\mathbf{V}'$ による $\mathbf{V}$ の商空間 $\mathbf{V}/\mathbf{V}'$ を考えると，与えられた表現 **D** から $n-\nu$ 次元の空間における表現 **E** が得られる（§5 の終り参照）．表現 **E** における C の固有値を μ とする．そうすれば空間 $\mathbf{V}$ において，$\mathbf{V}'$ に属しない，

$$C\mathbf{v} = \mu\mathbf{v} + \sum_i a_i\mathbf{e}_i \tag{10.36}$$

を満足するベクトル $\mathbf{v}$ が存在する．そこでベクトル

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} + \sum_i b_i\mathbf{e}_i$$

に対して $C\mathbf{w}$ を作れば，

$$C\mathbf{v} + \sum_i b_iC\mathbf{e}_i = \mu\mathbf{v} + \sum_i a_i\mathbf{e}_i + \sum_i \lambda_i b_i\mathbf{e}_i$$

であるから，

$$C\mathbf{w} = \mu\mathbf{w} + \sum_i \{a_i + b_i(\lambda_i - \mu)\}\mathbf{e}_i \tag{10.37}$$

を得る．(10.37) から次のことがわかる．(i) μ は $\lambda^{(\alpha)}$ のどれかと一致する．若しそうでなければ，b_i を適当にとって $a_i + b_i(\lambda_i - \mu)$ を全部 0 にすることができて，$\mathbf{V}'$ に属しないベクトル $\mathbf{w}$ が C の固有ベクトルになってしまう．(ii) $\mu = \lambda^{(\alpha)}$ であれば，$\lambda_j \neq \lambda^{(\alpha)}$ なるような j に対しては $a_j + b_j(\lambda_j - \mu) = 0$ になるように b_j を定める．そうすれば $C\mathbf{w} - \mu\mathbf{w} = \sum_\tau a_\tau\mathbf{e}_\tau{}^{(\alpha)}$ となり，$C\mathbf{w} - \mu\mathbf{w}$ が $\mathbf{V}'(\lambda^{(\alpha)})$ に属するベクトルになる．

このようにして $\mathbf{V}/\mathbf{V}'$ における表現 **E** に対して，C の固有値 μ が $\lambda^{(\alpha)}$ のどれかと一致することがわかった．それらの固有値の中で最大のものを $\mu = r/2$ としよう．

$$C\mathbf{w} = \frac{r}{2}\mathbf{w} + \mathbf{u}, \qquad \mathbf{u} \in \mathbf{V}'\left(\frac{r}{2}\right)$$

とすれば，交換関係 (10.27) により

$$CB\mathbf{w} = BC\mathbf{w} + B\mathbf{w} = \left(\frac{r}{2} + 1\right)B\mathbf{w} + B\mathbf{u} \tag{10.38}$$

を得る．故に若し $B\mathbf{u}$ が 0 でなければ，$\mu = r/2$ が $\mathbf{V}/\mathbf{V}'$ における最大の固有値という仮定により，$B\mathbf{w}$ は $\mathbf{V}'$ に含まれる．$B\mathbf{u} = 0$ であれば，$B\mathbf{w}$ は C の固有ベクトルであるから，$\mathbf{V}'$ に含まれる．いずれにしても $B\mathbf{w} \in \mathbf{V}'$ であるから，$B\mathbf{w} = \sum_i x_i \mathbf{e}_i$，また $\mathbf{u} \in \mathbf{V}'\left(\frac{r}{2}\right)$，従って $B\mathbf{u} \in \mathbf{V}'\left(\frac{r}{2} + 1\right)$ であるから，$B\mathbf{u} = \sum_\tau y_\tau \mathbf{e}_\tau^{(\beta)}\left(\lambda^{(\beta)} = \frac{r}{2}+1\right)$ である．これを (10.38) に代入すれば，

$$\sum_i \lambda_i x_i \mathbf{e}_i = \left(\frac{r}{2} + 1\right)\sum_i x_i \mathbf{e}_i + \sum_\tau y_\tau \mathbf{e}_\tau^{(\beta)}.$$

これから，$\lambda_i \neq \frac{r}{2} + 1$ に対しては $x_i = 0$，$\lambda_i = \lambda^{(\beta)}$ に対しては $y_\tau = 0$ となり，$B\mathbf{w}$ が $\mathbf{V}'\left(r + \frac{1}{2}\right)$ に属し，$B\mathbf{u} = 0$ なることがわかる．かつ $\frac{r}{2} + 1 \geqq 1$ であるから，$B\mathbf{w}$は，$\mathbf{u}' \in \mathbf{V}'\left(\frac{r}{2}\right)$ により $B\mathbf{w} = B\mathbf{u}'$ のように表わすことができる．そこで $\mathbf{s} = \mathbf{w} - \mathbf{u}'$ と置けば，$\mathbf{s}$ および $\mathbf{u}$ に対する次の基本関係：

$$C\mathbf{s} = \frac{r}{2}\mathbf{s} + \mathbf{u}, \qquad B\mathbf{s} = 0, \qquad B\mathbf{u} = 0 \tag{10.39}$$

を得る．

ベクトル $\mathbf{u}$ からは次々に $\mathbf{u}, A\mathbf{u}, \cdots\cdots, A^r\mathbf{u}$ が作られ，これらは既約表現の基底をなし，$A^{r+1}\mathbf{u} = 0$ である．$\mathbf{s}$ から $\mathbf{s}, A\mathbf{s}, \cdots\cdots, A^r\mathbf{s}, A^{r+1}\mathbf{s}$ を作ると，前と同様，交換関係 (10.27) によって計算して，

$$CA\mathbf{s} = \left(\frac{r}{2} - 1\right)A\mathbf{s} + A\mathbf{u}, \quad CA^2\mathbf{s} = \left(\frac{r}{2} - 2\right)A^2\mathbf{s} + A^2\mathbf{u}, \quad \cdots\cdots,$$

$$CA^h\mathbf{s} = \left(\frac{r}{2} - h\right)A^h\mathbf{s} + A^h\mathbf{u}, \ \cdots\cdots;$$

$$BA\mathbf{s} = -\frac{r}{2}\mathbf{s} - \mathbf{u}, \quad BA^2\mathbf{s} = (1 - r)A\mathbf{s} - 2A\mathbf{u}, \ \cdots\cdots,$$

$$BA^h\mathbf{s} = \frac{h}{2}(h - 1 - r)A^{h-1}\mathbf{s} - hA^{h-1}\mathbf{u}, \ \cdots\cdots$$

が得られる．$\mathbf{s}$, $A\mathbf{s}$, $A^2\mathbf{s}$, $\cdots\cdots$ を順次に作って行ったとき，それまでに作られたもの，および $\mathbf{u}$, $A\mathbf{u}$, $A^2\mathbf{u}$, $\cdots\cdots$, $A^r\mathbf{u}$ との間に最初に一次的関係を生ずるものを $A^{h+1}\mathbf{s}$ とする：

$$A^{h+1}\mathbf{s} = \alpha_0\mathbf{s} + \cdots\cdots + \alpha_h A^h\mathbf{s} + \beta_0\mathbf{u} + \cdots\cdots + \beta_r A^r\mathbf{u}.$$

この式の両辺に左から B を掛ければ，A^{h+1} を含まない関係が得られるが，一次的独立の仮定によりその各ベクトルの係数は全部0でなければならない．その中で $A^h\mathbf{s}$ の係数は $\dfrac{(h+1)(h-r)}{2}$ であるから，$h=r$ なることがわかる．同じ関係で $A^r\mathbf{u}$ の係数は，左辺では $-(h+1)=-(r+1)$，右辺では0である．これは矛盾であるから，$\mathbf{V}'$ と $\mathbf{V}$ とが一致しないと考えたのは誤りであったことがわかる．これで‘回転群 R のあらゆる表現 D が完全に可約である’ことの証明ができた．即ち‘回転群の任意の表現 D は

$$\mathsf{D} = \mathsf{D}_{j_1} + \mathsf{D}_{j_2} + \cdots\cdots + \mathsf{D}_{j_k} \tag{10.40}$$

のように，既約表現 D_{j_h} の和に簡約される.’ 各の D_{j_h} を表現 D の既約成分という．(10.40) の右辺には，一般には勿論同値の既約表現が重複して含まれる．D_{j_k} の含まれる回数を m_k とすれば，(10.40) は

$$\mathsf{D} = m_1\mathsf{D}_{j_1} + m_2\mathsf{D}_{j_2} + \cdots\cdots \tag{10.41}$$

と書かれる．(10.41) の形に書いたときには，j_1, j_2, $\cdots\cdots$ は異なるものとする．

§11. 回転群の二次元表現

前節において，我々は任意の次元数の回転群の既約表現が可能であることを知った．このなかで次数1のもの D_0 は恒等表現，即ち各の回転に数1を対応させるもので，問題にするに足りないから，次に簡単な二次元の表現 $\mathsf{D}_{1/2}$ につき考えよう．

無限小回転に対応する $\mathsf{D}_{1/2}$ の行列は，(10.33) により，

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{11.1}$$

であるから，x, y, z 軸のまわりの無限小回転に対応する行列を，

$$R_1 = \frac{1}{2i}S_1, \qquad R_2 = \frac{1}{2i}S_2, \qquad R_3 = \frac{1}{2i}S_3 \tag{11.2}$$

と書けば，S_1, S_2, S_3 は，(10.26) により，

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{11.3}$$

で与えられる．これらは量子力学で **Pauli のスピン行列**と称せられるもので，R_1, R_2, R_3 の満足する関係

$$S_\lambda S_\mu - S_\mu S_\lambda = 2iS_\nu \qquad ((\lambda, \mu, \nu) \text{ は } (1, 2, 3) \text{ の循環置換}) \tag{11.4}$$

の外に

$$S_\lambda{}^2 = E \quad (\text{単位行列}), \qquad S_\lambda S_\mu + S_\mu S_\lambda = 0 \tag{11.5}$$

を満足する．従って

$$S_\lambda S_\mu = iS_\nu = -S_\mu S_\lambda \qquad ((\lambda, \mu, \nu) \text{ は } (1, 2, 3) \text{ の循環置換}) \tag{11.6}$$

である．かつ 'S_λ はエルミート行列：$\bar{S}_\lambda^* = S_\lambda$ である.'

$\mathbf{D}_{1/2}$ の表現空間 $\mathbf{V}_2$ における二次元複素ベクトル $\vec{\chi}(\xi, \eta)$ を**スピノル**と呼ぶ．スピノルが回転 r に対してどのように変換を行うかを求めてみよう．$\vec{\chi}$ を行列

$$\chi = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$$

で表わせば，α, β, γ 方向の無限小回転による χ の変化は，(10.23) により，

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{1}{2i}S\chi \tag{11.7}$$

から定まる．ここに

$$S = \alpha S_1 + \beta S_2 + \gamma S_3 = \begin{bmatrix} \gamma & \alpha - \beta i \\ \alpha + \beta i & -\gamma \end{bmatrix} \tag{11.8}$$

の $1/2i$ が，表現 $\mathbf{D}_{1/2}$ において，回転軸 α, β, γ のまわりの角速度 1 の無限小回転に対応する行列である．(11.7) を解いて，$t = 0$ で $\chi = \chi_0$ なる解 $\chi(t)$ が求められれば，$\chi_0 \to \chi(t)$ なる変換として，回転 $r(t\,;\, \alpha, \beta, \gamma)$ に対する表

現が求められる．そのために，

$$\chi = pe^{i\lambda t/2} \tag{11.9}$$

と置く．ここに $p=\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$．これを (11.7) に代入すれば，$p_1$, p_2 の満足する連立同次方程式

$$\left.\begin{aligned} (\lambda+\gamma)p_1+(\alpha-\beta i)p_2=0, \\ (\alpha+\beta i)p_1+(\lambda-\gamma)p_2=0 \end{aligned}\right\} \tag{11.10}$$

が得られる．従って λ は

$$\begin{vmatrix} \lambda+\gamma & \alpha-\beta i \\ \alpha+\beta i & \lambda-\gamma \end{vmatrix} = \lambda^2-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=\lambda^2-1=0$$

の根で，その値が ± 1 と定まる．$\lambda=1$ に対しては，(11.10) により

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{\alpha-\beta i}{-1-\gamma},$$

$\lambda=-1$ に対しては

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{\alpha-\beta i}{1-\gamma}.$$

よって c_1, c_2 を定数として，

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha-\beta i \\ -1-\gamma \end{bmatrix} c_1 e^{it/2} + \begin{bmatrix} \alpha-\beta i \\ 1-\gamma \end{bmatrix} c_2 e^{-it/2}$$

が (11.7) の一般解である．初期条件 $t=0$ で $\xi=\xi_0$, $\eta=\eta_0$ を代入すれば

$$\xi_0=(\alpha-\beta i)(c_1+c_2),$$

$$\eta_0=-c_1+c_2-\gamma(c_1+c_2).$$

よって

$$c_1=\frac{1}{2}\left\{\frac{1-\gamma}{\alpha-\beta i}\xi_0-\eta_0\right\}, \qquad c_2=\frac{1}{2}\left\{\frac{1+\gamma}{\alpha-\beta i}\xi_0+\eta_0\right\}.$$

従って $(\xi_0, \eta_0)\to(\xi, \eta)$ の変換は

$$\xi=\frac{1}{2}\left\{(1-\gamma)e^{it/2}+(1+\gamma)e^{-it/2}\right\}\xi_0-\frac{1}{2}\left\{(\alpha-\beta i)(e^{-it/2}-e^{it/2})\right\}\eta_0,$$

$$\eta = -\frac{1}{2}\frac{1-\gamma^2}{\alpha-\beta i}(e^{it/2}-e^{-it/2})\xi_0 + \frac{1}{2}\Big\{(1+\gamma)e^{it/2}+(1-\gamma)e^{-it/2}\Big\}\eta_0$$

で与えられる. $e^{\pm ix}=\cos x \pm i\sin x$, および $1-\gamma^2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta i)\cdot(\alpha-\beta i)$ の関係を用いれば, この変換 $\chi=U\chi_0$ の行列は

$$U=\begin{bmatrix} \cos\frac{t}{2}-i\gamma\sin\frac{t}{2} & -i(\alpha-\beta i)\sin\frac{t}{2} \\ -i(\alpha+\beta i)\sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2}+i\gamma\sin\frac{t}{2} \end{bmatrix} \tag{11.11}$$

と書かれる. これが求めるスピノル空間における回転 $r=(t\,;\,\alpha,\,\beta,\,\gamma)$ に対する表現行列である. これはまた $t=\omega$ として, 行列 (11.3) により,

$$\begin{aligned} U &= \cos\frac{\omega}{2}S_0 - i\sin\frac{\omega}{2}(\alpha S_1+\beta S_2+\gamma S_3) \\ &= \cos\frac{\omega}{2}E - i\sin\frac{\omega}{2}S \end{aligned} \tag{11.12}$$

と書いてもよい. ただし $S_0=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=E_2$ (二次元単位行列) である.

この結果は (10.25) を用いれば甚だ簡単に導かれる. 即ち, (11.5) により,

$$\begin{aligned} S^2 &= (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)E+\beta\gamma(S_2S_3+S_3S_2) \\ &\quad +\gamma\alpha(S_3S_1+S_1S_3)+\alpha\beta(S_1S_2+S_2S_1) \\ &= E \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} S^n &= E \quad (n\ \text{偶数}) \\ &= S \quad (n\ \text{奇数}) \end{aligned}$$

である. よって, (10.14), (10.25) により,

$$\begin{aligned} U(r) = e^{tS/2i} &= \left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{2}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{t}{2}\right)^4-\cdots\cdots\right\}E \\ &\quad +\frac{1}{i}\left\{\left(\frac{t}{2}\right)-\frac{1}{3!}\left(\frac{t}{2}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{t}{2}\right)^5-\cdots\cdots\right\}S \\ &= \cos\frac{t}{2}E - i\sin\frac{t}{2}S. \end{aligned}$$

U の各行の絶対値二乗の和は

$$\cos^2\frac{t}{2}+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\sin^2\frac{t}{2}=1$$

であり，第1行の共軛複素数：

$$\cos\frac{t}{2}+i\gamma\sin\frac{t}{2}, \qquad i(\alpha+\beta i)\sin\frac{t}{2}$$

の各に，第2行の第1，第2成分を掛けて加えれば0になるから，U はユニタリ行列である*．かつ

$$\det(U)=\cos^2\frac{t}{2}+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\sin^2\frac{t}{2}=1$$

であるから，変換 U は特殊ユニタリ群 $\mathbf{SU}_2$ に属する．

群 $\mathbf{SU}_2$ に属する変換行列を，一般に，

$$U=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad ad-bc=1 \tag{11.13}$$

とすれば，その逆行列が

$$U^{-1}=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

で与えられることは容易に確められる．従ってユニタリ条件：$U^{-1}=\tilde{U}$ から，

$$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{bmatrix},$$

即ち $d=\bar{a}$, $c=-\bar{b}$ を得る．よって‘$\mathbf{SU}_2$ の変換行列は，一般に，

$$U=\begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}, \qquad \bar{a}a+\bar{b}b=|a|^2+|b|^2=1 \tag{11.14}$$

で与えられる.’ 或いは二つの複素数 a, b の代りに，それらを実数部分および虚数部分に分けて，$a=\kappa-i\nu$, $b=-\mu-i\lambda$ とすれば，

$$U=\begin{bmatrix} \kappa-i\nu & -\mu-i\lambda \\ \mu-i\lambda & \kappa+i\nu \end{bmatrix}, \qquad \kappa^2+\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1 \tag{11.15}$$

と書かれる．これはまた

---

*　このことは $\overline{U}^*(r)=e^{-t\overline{S}^*/2i}$, $U(r)\overline{U}^*(r)=e^{(\overline{S}^*-S)t/2i}=E$ からもすぐに知れる．

$$U=\kappa\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-i\lambda\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}-i\mu\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix}-i\nu\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

即ち

$$U=\kappa E-i\lambda S_1-i\mu S_2-i\nu S_3 \tag{11.16}$$

と表わすことができる．κ, λ, μ, ν は群 $\mathbf{SU}_2$ のパラメタで，その間に各の二乗の和が 1 であるという関係が 1 個あるから，独立なものは 3 個である．κ λ, μ, ν を四次元空間の直交座標と考えれば，(11.15) の第二の関係により，'$\mathbf{SU}_2$ のパラメタ空間は，この四次元空間における半径 1 の三次元球面 **K** で，単連結である.' このことは半直観的に自明であるが，次のようにして簡単に示される．

$$\kappa^2+\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1$$

であるから，$|\kappa|\leqq 1$. よって

$$\kappa=\cos\theta_1 \qquad (0\leqq\theta_1\leqq\pi) \tag{11.17}$$

と置けばその可能な全部の値が尽される．一方

$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1-\kappa^2=\sin^2\theta_1$$

であるから，λ, μ, ν は三次元空間の半径 $\sin\theta_1$ ($\geqq 0$) の球面上の点である．よって余緯度 θ_2，経度 θ_3 を用いて，

$$\lambda=\sin\theta_1\cos\theta_2,\quad \mu=\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3,\quad \nu=\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3$$
$$(0\leqq\theta_2\leqq\pi,\quad 0\leqq\theta_3<2\pi) \tag{11.18}$$

で表わされる．この空間内の曲線 C は，例えば弧の長さ s をパラメタとして，

$$\theta_1=f_1(s),\quad \theta_2=f_2(s),\quad \theta_3=f_3(s)$$

のように表わされる．特に閉曲線に対しては，その全長を A とすれば，これらの函数は

$$\left.\begin{aligned}&f_1(s+A)=f_1(s), \qquad f_2(s+A)=f_2(s),\\ &f_3(s+A)=f_3(s) \text{ または } f_3(s+A)=f_3(s)+2\pi\end{aligned}\right\} \tag{11.19}$$

を満足する．そこで

$$\theta_1=pf_1(s),\quad \theta_2=f_2(s),\quad \theta_3=f_3(s) \qquad (0\leqq p\leqq 1)$$

で表わされる曲線の集り C_p を考えると，これは (11.19) の条件によりやはり閉曲線で，$p=1$ では与えられた閉曲線 C に一致し，p を連続的に減らせば，連続的に変形して，遂に $p=0$ に至って $\kappa=1$, $\lambda=\mu=\nu=0$ なる一点 (北極) に縮まる (証明了)．或いは θ_1, θ_2, θ_3 を直交座標とする $0 \leqq \theta_1$, $\theta_2 \leqq \pi$, $0 \leqq \theta_3 \leqq 2\pi$ の直方体を考え，$\theta_1=0$, $\theta_1=\pi$ の両面は，それぞれただ一つの点を，$\theta_2=0$, $\theta_3=\pi$ の両面における $\theta_1=$ 一定 の直線が各ただ一つの点を，$\theta_3=0$ と $\theta_3=2\pi$ の (θ_1, θ_2) が同一点を表わすことを考慮して，この空間内に引いた任意の閉曲線が一点，例えば $\theta_1=0$ の面にちぢめられることをいってもよい．この空間の閉曲線にどんなものが可能かを考えて，これを一点に縮めることは興味があると思われるから，読者自ら試みられたい．

これに反して，回転群のパラメタ空間は §2 に記したように単連結でないから，**R** の元 r と $\mathbf{SU}_2$ の元 U との対応は一対一ではない．前にも述べたように，回転のパラメタ t が十分小さいときは，r に対応する U は一義的に定まる．実際 $0 \leqq t \leqq \pi$ の範囲では，t は回転角 ω と一致するから，$U(\kappa, \lambda, \mu, \nu)$ と $r(\omega\,;\alpha, \beta, \gamma)$ との関係は，(11.11) と (11.15) (或いは (11.12) と (11.16)) とから，

$$\kappa=\cos\frac{\omega}{2},\quad \lambda=\alpha\sin\frac{\omega}{2},\quad \mu=\beta\sin\frac{\omega}{2},\quad \nu=\gamma\sin\frac{\omega}{2} \tag{11.20}$$

となり，その対応は一対一である．これは (11.17) で $0 \leqq \theta_1 \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分であるから，**K** の‘北半球’$\kappa \geqq 0$ の部分に当っている．

t が π を超えると，反対方向 $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ のまわりの角 $t=2\pi-\omega$ の回転が，$r(\omega\,;\alpha, \beta, \gamma)$ と一致する．これに対しては，(11.11) と (11.15) とから，

$$\begin{gathered}\kappa_1=-\cos\frac{\omega}{2},\quad \lambda_1=-\alpha\sin\frac{\omega}{2},\quad \mu_1=-\beta\sin\frac{\omega}{2},\\ \nu_1=-\gamma\sin\frac{\omega}{2},\end{gathered} \tag{11.21}$$

即ち $U_1(-\kappa, -\lambda, -\mu, -\nu)$ が対応する．これは‘南半球’$\kappa \leqq 0$ の部分の，$U(\kappa, \lambda, \mu, \nu)$ の対蹠点に当たる．$2\pi \leqq t \leqq 3\pi$ では，対応は (11.20),

$3\pi \leqq t \leqq 4\pi$ では，(11.21) となるから，これ以上 t を増しても別に異なるものは出て来ない．よって一つの回転 r に対し SU_2 の二個の変換 U, U_1 が対応する．即ち表現 $\mathsf{D}_{1/2}$ は回転群 R の二価表現である．U_1 は U の各成分の符号を変えたもの，いい換えれば U に空間 $\mathbf{V}_2$ における反転 $-E_2$ を合成したものである．

この対応を一対一にするには，回転群のパラメタ空間の代りに，§2 に示した $\mathbf{S}$ と $\mathbf{S}_1$ とよりなる二重空間を用いればよい．そうすれば $\mathbf{S}$ は $\mathbf{K}$ の '北半球' に，$\mathbf{S}_1$ はその '南半球' に一対一に対応することは，丁度 $w=z^{1/2}$ の Riemann 面の上葉が w 平面の上半分に，下葉がその下半面に一対一に対応するのに類する．このようにすればパラメタ t の 0 から 2π までの値に対して，表現 $\mathsf{D}_{1/2}=\mathsf{SU}_2$ が一対一に対応し一価連続表現が得られる．

回転 r を表わすのに，(11.20) の関係を満足する四つのパラメタ $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ を用いることは古く Euler に遡る．Whittaker の書物などでは χ, ξ, η, ζ と記され，**Euler-Olinde-Rodrigues のパラメタ**という名称で呼ばれている*．これに対して複素数の変換係数 a, b, c, d は通常 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ と記される **Cayley-Klein のパラメタ**と称するものと，

$$a=\alpha, \quad b=-i\gamma, \quad c=i\beta, \quad d=\delta \tag{11.22}$$

の関係がある．

四次元空間の中の三次元球面を表わす独立なパラメタとして，$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ の代りに変数 $\lambda, \mu, \nu(\kappa=\pm\sqrt{1-(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)})$ を用いれば，$\mathbf{K}$ はこの三つの変数を直交座標とする $\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1$ なる球面 $\mathbf{S}'$ の内部および表面によって表わされる．λ, μ, ν は (11.20) により α, β, γ に比例するから，この球 $\mathbf{S}'$ は，前のパラメタ空間 $\mathbf{S}$ と似たもので，ただ動径の長さが ω でなく，$\sin(\omega/2)$ である（従って半径が π でなく 1 である）だけの違いである．ただし κ の $\pm$ の両方をあらわすためには，$\mathbf{S}'$, $\mathbf{S}_1'$ の 2 個の球面がいる．そして κ

* E. T. Whittaker: '*Analytical Dynamics*' (Cambridge).

$=0$, 即ち球の表面では，この二つが一致する．これは丁度 **S** と **S′** とを重ねて単連結になるといったことに対応する．§3 に記した三次元球面を赤道面に射影したものと比較すれば，その意味がはっきりしよう．

このように一つの群 $\mathbf{SU}_2$ に対して色々のパラメタ空間 **K**, ($\mathbf{S}$, $\mathbf{S}_1$), ($\mathbf{S}'$, $\mathbf{S}_1'$) などが考えられる．もともと一つの連続群 **G** に対して，パラメタは一義的に定まらない．回転群の場合にも $(\omega\,;\,\alpha,\,\beta,\,\gamma)$ でもよし，Euler の角 $\theta,\,\varphi,\,\psi$ でもよいというように，色々なとり方がある，その上，これらのパラメタをユークリッド空間の点として表わす仕方にも（直交座標と考えるとか，極座標と考えるとか，そのほか）種々あり得るわけである．これらに共通した性質としては，同じ群元 r に対応するパラメタ空間 **P** の点 R と，もう一つのパラメタ空間 **P′** の点 R′ とが一対一に連続的に対応することである．即ちパラメタ空間を寒天のようなもので作って，（切れ目ができない範囲で）これを勝手に圧し縮めたり，伸ばしたりしても差支ない．四次元空間で **K** を赤道($\kappa=0$)に上下から圧し潰したものが $\mathbf{S}'$, $\mathbf{S}_1'$ で，これらを半径に沿って，中心からの距離によって違う割合で，各方向一様に引き延ばしたものが $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}_1$ である．だから，$\mathbf{SU}_2$ のパラメタ空間としては，これは同等の資格を持ったものである．パラメタ空間 **P** について大切なことは，このような変形に対して不変な一定の位相を持つことと，群元 $r,\,s$ に対する二つの点 R, S に対し $sr=t$ に対応する点 T が一義的に定まることである．この第二の性質はまた，点 R∈**P** が，群元 $s\in$ **G** により，$t=sr$ に対応するきまった点 T に移されるといってもよい．これによって群元 s は **P** における点変換 R→T として具体化される．

$|a|^2+|b|^2=1$ を満足する3個の実数パラメタとしては，上記の $\theta_1,\,\theta_2,\,\theta_3$, または $\lambda,\,\mu,\,\nu$ の外にも色々考えられる．その一つとして

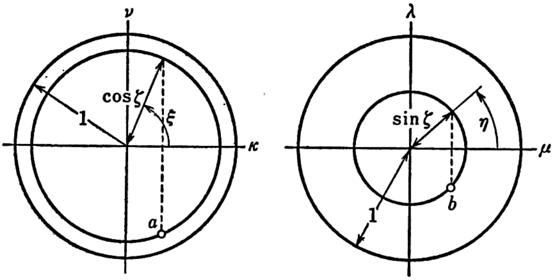
$$|a|=\cos\zeta,\quad |b|=\sin\zeta\quad (0\leqq\zeta\leqq\pi/2)$$

$$a=\cos\zeta e^{-i\xi},\qquad b=-\sin\zeta e^{i\eta}\qquad (0\leqq\xi,\ \eta<2\pi)\qquad (11.23)$$

即ち

$$\kappa = \cos\zeta\cos\xi,\quad \lambda = \sin\zeta\sin\eta,\quad \mu = \sin\zeta\cos\eta,\quad \nu = \cos\zeta\sin\xi \tag{11.24}$$

なる ξ, η, ζ を用いることができる．その (κ, ν) および (μ, λ) 平面への射影は，それぞれ $\cos\zeta$, $\sin\zeta$ を半径とする偏角 ξ, η なる点である．



第 30 図

このパラメタにより本来の回転，即ち空間 S に相当する部分に当るものを求めるには，ξ, η の変域を $(-\pi, \pi)$ とした方が便利である．そうすれば $\kappa \geqq 0$ の部分は $-\pi/2 \leqq \xi \leqq \pi/2$ で $\xi = \pi/2$ と $-\pi/2$ とは同一の点である．

x, y, z 軸の周りの角 ω の回転に対する $\mathbf{SU}_2$ の行列は，(11.11) において，$\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$; $\beta = 1$, $\alpha = \gamma = 0$; $\gamma = 1$, $\alpha = \beta = 0$ と取ることにより得られる：

$$\left.\begin{aligned} U_x &= \begin{bmatrix} \cos\frac{\omega}{2} & -i\sin\frac{\omega}{2} \\ -i\sin\frac{\omega}{2} & \cos\frac{\omega}{2} \end{bmatrix}, \\ U_y &= \begin{bmatrix} \cos\frac{\omega}{2} & -\sin\frac{\omega}{2} \\ \sin\frac{\omega}{2} & \cos\frac{\omega}{2} \end{bmatrix}, \\ U_z &= \begin{bmatrix} e^{-\frac{i\omega}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\omega}{2}} \end{bmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{11.25}$$

Euler の角 θ, φ, ψ で示される回転は，第1章に記したように，z 軸のまわりに φ，これによって移動した y 軸（＝OY）のまわりに θ，これら二回の回転によって動いて来た新しい z 軸即ち z' 軸のまわりに ψ だけの回転を更に行ったもの，即ち上記の3個の回転を合成したものである．ただしこの場合は，回転後の基底をもとにして次の回転を考えているから，8頁の注意により，行列の合成の順序が逆になって，対応する二次元表現の行列は

$$\begin{bmatrix} e^{-\frac{i\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\varphi}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\frac{i\psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\psi}{2}} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} e^{-\frac{\varphi+\psi}{2}}\cos\frac{\theta}{2} & -e^{-i\frac{\varphi-\psi}{2}}\sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\frac{\varphi-\psi}{2}}\sin\frac{\theta}{2} & e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}}\cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \tag{11.26}$$

で与えられる．よって

$$a = \cos\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi+\psi}{2}}, \qquad b = -\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi-\psi}{2}}. \tag{11.27}$$

したがってパラメタ κ, λ, μ, ν は，Euler の角 θ, φ, ψ を用いて，

$$\left.\begin{aligned} \kappa &= \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi+\varphi}{2}, & \lambda &= \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi-\varphi}{2}, \\ \mu &= \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi-\varphi}{2}, & \nu &= \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi+\varphi}{2} \end{aligned}\right\} \tag{11.28}$$

で表わされる．(11.20) と (11.28) から θ, φ, ψ と ω ; α, β, γ の関係が知れる．なお (11.24) と比較して，

$$\zeta = \theta/2, \qquad \xi = (\varphi+\psi)/2, \qquad \eta = (\psi-\varphi)/2 \tag{11.29}$$

の関係が得られる．

$U(r)$ の形が知れているから，回転の合成に対するパラメタ κ, λ, μ, ν の合成則を見出すことは容易である．即ち (11.16) により

$$U(r) = \kappa S_0 - i\lambda S_1 - i\mu S_2 - i\nu S_3 \tag{11.30}$$

であるから，$r''=r'r$ に対する行列 $U(r'')=U(r')U(r)$ は，(11.30) と

$$U(r')=\kappa' S_0-i\lambda' S_1-i\mu' S_2-i\nu' S_3$$

とを掛けて，$S_\lambda S_\mu$ を (11.4) により S_ν で表わせば得られる．(ただし $S_0S_\lambda=S_\lambda S_0=S_\lambda$.) その代りに S_0, $-iS_1$, $-iS_2$, $-iS_3$ と同様の乗法則を持つ量 1, **i**, **j**, **k** を結合した量

$$\mathbf{q}=\kappa+\lambda\mathbf{i}+\mu\mathbf{j}+\nu\mathbf{k}, \tag{11.31}$$

$$\mathbf{i}^2=\mathbf{j}^2=\mathbf{k}^2=-1,\quad \mathbf{jk}=-\mathbf{kj}=\mathbf{i},\quad \mathbf{ki}=-\mathbf{ik}=\mathbf{j},\quad \mathbf{ij}=-\mathbf{ji}=\mathbf{k} \tag{11.32}$$

を用いても同じことである．(11.31) の形の量を Hamilton の**四元数**といい，複素数 $z=x+yi$ の或る意味の拡張になっている．

$$\mathbf{q}'=\kappa'+\lambda'\mathbf{i}+\mu'\mathbf{j}+\nu'\mathbf{k}$$

とすれば，二つの回転 $r(\kappa,\lambda,\mu,\nu)$, $r'(\kappa',\lambda',\mu',\nu')$ の積 $r''(\kappa'',\lambda'',\mu'',\nu'')=r'r$ に対応する四元数

$$\mathbf{q}''=\mathbf{q}'\mathbf{q}=\kappa''+\lambda''\mathbf{i}+\mu''\mathbf{j}+\nu''\mathbf{k} \tag{11.33}$$

に対しては，(11.32) の関係を用いて，

$$\left.\begin{aligned}\kappa''&=\kappa'\kappa-\lambda'\lambda-\mu'\mu-\nu'\nu,\\ \lambda''&=\lambda'\kappa+\kappa'\lambda-\nu'\mu+\mu'\nu,\\ \mu''&=\mu'\kappa+\nu'\lambda+\kappa'\mu-\lambda'\nu,\\ \nu''&=\nu'\kappa-\mu'\lambda+\lambda'\mu+\kappa'\nu\end{aligned}\right\} \tag{11.34}$$

を得る．これをパラメタ空間 **K** の点 (或いはベクトル) $\mathrm{P}(\kappa,\lambda,\mu,\nu)$ から $\mathrm{P}''(\kappa'',\lambda'',\mu'',\nu'')$ への変換 $\mathrm{P}\to\mathrm{P}''=A\mathrm{P}$ と考えれば，

$$A=\begin{bmatrix}\kappa' & -\lambda' & -\mu' & -\nu'\\ \lambda' & \kappa' & -\nu' & \mu'\\ \mu' & \nu' & \kappa' & -\lambda'\\ \nu' & -\mu' & \lambda' & \kappa'\end{bmatrix} \tag{11.35}$$

は直交行列で，A は $\mathbf{O}_4{}^r$ に属していることがわかる．よってパラメタ空間 **K** において群 $\mathbf{SU}_2$ の合成則 $U''=U'U$ に対応する点の変換 $\mathrm{P}\to\mathrm{P}''$ は直交変換

A で，これによって $U' \in \mathbf{SU}_2$ は $\mathbf{K}$ における点変換として具体化される．

det (A) $(=\pm 1)$ は $\kappa', \lambda', \mu', \nu'$ の連続函数であって，$\kappa'=1$, $\lambda'=\mu'=\nu'=0$ に対しては det $(A)=1$ である．かつ変換 A は単連結空間 $\mathbf{K}$ の点 P′ と一対一に相応するから det (A) は常に 1 である．従って変換 ‘$\mathrm{P}\to\mathrm{P}''=A\mathrm{P}$ は，四次元空間における回転である．’

U に対応する $\mathbf{K}$ の ‘点’ P，並びに U が $\mathbf{K}$ の点に引き起こす変換 A を，まぎれやすいが同じ文字 U で示すことにすれば，合成則 $U''=U'U$ をパラメタ空間で考えたときには，“$\mathbf{K}$ の ‘点 U’ は四次元空間の ‘回転 U'’ により ‘点 U''’ に移る” という簡単化したいい表わしが可能である．

純粋の回転群 $\mathbf{R}$ から，広義の回転群 $\mathbf{R}'$ に移るには，§6 に記したように，1 個の元: 反転 を付け加えればよい．$\mathbf{D}_j$ の既約表現行列を $A(r)$，反転に対応する行列を I とすれば，$r\iota=\iota r$ であるから

$$A(r)I=IA(r)$$

が総べての $r\in\mathbf{R}$ につき成立つ．従って Schur の補題 (§9) により $I=\alpha E$ である．一方 $\iota^2=\iota\iota=e$ であるから $I^2=E$, これから $\alpha^2=1$, $\alpha=\pm 1$ を得る．よって反転に $+E$ を対応させるか，$-E$ を対応させるかにより $\mathbf{R}$ の既約表現 $\mathbf{D}_j$ から 2 個の既約表現が得られる．これらをそれぞれ**偶表現**，**奇表現**と呼び，$\mathbf{D}_j^+$, $\mathbf{D}_j^-$ と記す．そして $\alpha=\pm 1$ を**反転指標**と称する．

§12.　二次元特殊ユニタリ群の表現としての回転群の表現

前節に示したように，二次元特殊ユニタリ群 $\mathbf{SU}_2$ は回転を表わすのに便利に用いられるが，更に回転群の表現を求めるために利用すると最も有効である．それは今までの対応 $\mathbf{R}\to\mathbf{SU}_2$ を逆に考えて，回転群，或はもっと正確には行列式 $+1$ の実直交変換群 $\mathbf{SO}^r{}_3$——大分添えものが多くなったが r は実空間における変換，3 はその次元数，$\mathbf{S}$ は行列式が $+1$ なることを意味する——を二次元の特殊ユニタリ群の表現と考えることがある．そうすれば $U\to r$ の対

応は二対一で，忠実ではない．しかし，表現には必ずしも忠実性を要求する必要がないから，$U \to r \to A(r)$ の対応により，回転群 **R** の表現は同時に二次元特殊ユニタリ群 $\mathbf{SU}_2$ の表現になる．ところが $\mathbf{SU}_2$ に属する変換はこれを表わす式が簡単であるから，その表現も次のようにして容易に求められる．

2個の変数 u, v の p 次同次多項式

$$x_0 u^p + x_1 u^{p-1} v + \cdots\cdot + x_p v^p = \sum_{r=0}^{p} x_r u^{p-r} v^r \tag{12.1}$$

を考えると，これらの同次式を二つ加えたもの，並びに数を掛けたものが，やはり p 次の同次式である．よってその集合は一つのベクトル空間 $\mathbf{V}_{p+1}$ を作っている．この空間においては，$p+1$ 個の p 次単項式

$$u^p, \qquad u^{p-1}v, \qquad \cdots\cdot, \qquad v^p \tag{12.2}$$

がその基底を作っている．事実任意の p 次同次式はこれらの単項式の一次結合として (12.1) の形に書ける．また (12.1) が恒等的に 0 になるためには

$$x_0 = x_1 = \cdots\cdot = x_p = 0$$

であるから，(12.2) の $p+1$ 個のベクトルは一次的に独立である．$\mathbf{V}_{p+1}$ における "多項式ベクトル" $\mathbf{x}$ の，この基底に対する '成分' は，多項式 (12.1) の係数 $(x_0, x_1, \cdots\cdot, x_p)$ にほかならない．

そこで，変数 u, v に $\mathbf{SU}_2$ の変換 U (基底に対する変換)

$$\left.\begin{aligned} u' &= ua + vc, \\ v' &= ub + vd \end{aligned}\right\} \tag{12.3}$$

を施せば，$\mathbf{V}_{p+1}$ の基底 (12.2) は

$$u'^r v'^{p-r} = (ua + vc)^r (ub + vd)^{p-r} \qquad (r = 0, 1, \cdots\cdot, p)$$

に変わり，右辺を二項定理で展開して掛け合わせれば，p 次の同次多項式となる，即ち基底の変換則が定まる．従って各の U に $\mathbf{V}_{p+1}$ におけるベクトルの一つの一次変換が対応する．このようにして $\mathbf{SU}_2$ の $p+1$ 次元の表現が得られた．これを $\mathbf{C}_p$ という記号で表わすことにしよう．後に示すように $\mathbf{C}_p$ は回

転群の表現 $\mathbf{D}_{p/2}$ と同値である．そうすれば $\mathbf{C}_p$ が既約なことは当然であるが，直接の証明は次のようにして与えられる．

z 軸のまわりの角 ω の回転に対する $\mathbf{SU}_2$ の変換

$$u' = ue^{-i\omega/2}, \qquad v' = ve^{i\omega/2} \tag{12.4}$$

によって，$u^\alpha v^\beta$ は

$$u'^\alpha v'^\beta = u^\alpha v^\beta e^{-i(\alpha-\beta)\omega/2} \tag{12.5}$$

となるから，$\mathbf{C}_p$ の基底 (12.2) の各は

$$\epsilon_0 = e^{-ip\omega/2}, \quad \epsilon_1 = e^{-i(p/2-1)\omega}, \quad \cdots\cdot, \quad \epsilon_p = e^{ip\omega/2} \tag{12.6}$$

なる因数を得る．ω が特別な値でなければ，これらの $p+1$ 個の因数は全部異なる．というのは，絶対値1の複素数 ϵ_r $(r=0,\ 1,\ \cdots\cdot,\ p)$ は全部複素平面の原点を中心とする単位円の上に載っていて，その偏角は $\omega/2$ の整数倍である．よって $\omega/2$ が π の有理数倍でなければ，これらの点が一致することはない．($m,\ n$ を異なる整数として $e^{im\omega/2}$ と $e^{in\omega/2}$ とが一致するためには $m\omega/2-n\omega/2=(m-n)\omega/2$ が 2π の整数倍 $2\pi h$ (h は整数) に等しくなければならない．それは $m-n=k=$ 整数 として，$\omega/2=2\pi h/k$, 即ち $\omega/2$ が π の有理数倍である場合に限る．)

$\mathbf{C}_p$ の既約性を証明するため，それが可約であると仮定すればどんな結果に導かれるかを考えてみることにする．$\mathbf{C}_p$ が可約であれば，その表現空間 $\mathbf{V}_{p+1}$ の中に，不変な部分空間 $\mathbf{V}_q(q<p+1)$ が存在する．$\mathbf{V}_q$ は $\mathbf{V}_{p+1}$ に属するベクトルの部分集合であるから，$u,\ v$ の p 次の同次式の或る特別なものの集合である．いま

$$w_0 = A_0u^p + A_1u^{p-1}v + \cdots\cdot + A_pv^p \tag{12.7}$$

をこの中の一つとしよう．変換 (12.4) により，これは

$$w_1 = \epsilon_0A_0u^p + \epsilon_1A_1u^{p-1}v + \cdots\cdot + \epsilon_pA_pv^p$$

に変わる．この操作を順次に繰返せば，p 回目には，

$$w_p = \epsilon_0{}^pA_0u^p + \epsilon_1{}^pA_1u^{p-1}v + \cdots\cdot + \epsilon_p{}^pA_pv^p$$

を得る．これらの $w_0, \cdots, w_p$ は勿論 $\mathbf{V}_q$ に属する．そこで，形式的に

$$A_0u^p = z_0, \qquad A_1u^{p-1}v = z_1, \qquad \cdots\cdot, \qquad A_pv^p = z^p$$

と置けば，これらの $p+1$ 個の関係は

$$\left.\begin{aligned} z_0 + z_1 + \cdots\cdot + z_p &= w_0, \\ \epsilon_0 z_0 + \epsilon_1 z_1 + \cdots\cdot + \epsilon_p z_p &= w_1, \\ \cdots\cdot \quad \cdots\cdot \quad \cdots\cdot \quad &\cdots\cdot \\ \epsilon_0{}^p z_0 + \epsilon_1{}^p z_1 + \cdots\cdot + \epsilon_p{}^p z_p &= w_p \end{aligned}\right\} \tag{12.8}$$

と書かれる．これを未知数 $z_0, z_1, \cdots\cdot, z_p$ に対する連立一次方程式と見れば，その係数の行列式

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots\cdot & 1 \\ \epsilon_0 & \epsilon_1 & \cdots\cdot & \epsilon_p \\ \cdots\cdot & \cdots\cdot & \cdots\cdot & \\ \epsilon_0{}^p & \epsilon_1{}^p & \cdots\cdot & \epsilon_p{}^p \end{vmatrix}$$

は，$\epsilon_0, \epsilon_1, \cdots\cdot, \epsilon_p$ が全部異なるとすれば，0 でない．$\varDelta$ は **Vandermonde の行列式**と呼ばれ，

$$\begin{aligned} \varDelta = (-1)^{p(p+1)/2}(\epsilon_0-\epsilon_1)(\epsilon_0-\epsilon_2)\cdots\cdot(\epsilon_0-\epsilon_p) \\ \times(\epsilon_1-\epsilon_2)\cdots\cdot(\epsilon_1-\epsilon_p) \\ \times\cdots\cdot \quad \cdots\cdot \quad \cdots\cdot \\ \times(\epsilon_{p-1}-\epsilon_p) \end{aligned}$$

となることは御承知の読者も多かろう．この式で $\epsilon_0, \cdots\cdot, \epsilon_p$ が全部異なれば，明かに $\varDelta \neq 0$ である．$\varDelta \neq 0$ のためには，$(-1)^{p(p+1)/2}$ なる係数は重要でないから，$\varDelta$ が Const. $\times(\epsilon_0-\epsilon_1)\cdots\cdot(\epsilon_{p-1}-\epsilon_p)$ なることを念のため証明して置こう．それは誠に簡単である．$\varDelta$ の中で $\epsilon_\mu = \epsilon_\nu$ $(\mu, \nu = 0, 1, \cdots\cdot, p;\ \mu \neq \nu)$ と置けば，第 μ 列と第 ν 列とが一致するから，$\varDelta = 0$. よって $\varDelta$ は $(\epsilon_\mu - \epsilon_\nu)$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots\cdot, p)$ なる因数を持つ．従って

$$\varDelta = D(\epsilon_0-\epsilon_1)(\epsilon_0-\epsilon_2)\cdots\cdot(\epsilon_{p-1}-\epsilon_p).$$

Δ での ϵ_0 の最高次の累乗は左辺でも，右辺でも $\epsilon_0{}^p$ であるから，D は 0 でない定数である．

このようにして方程式 (12.8) は $z_0,\ z_1,\ \cdots,\ z_p$ について必ず解けて，z_r は $w_0,\ w_1,\ \cdots,\ w_p$ の一次結合になることがわかった：

$$z_r = A_r u^{p-r} v^r = \sum_j c_{rj} w_j \qquad (r = 0,\ \cdots,\ p). \qquad (12.9)$$

ここで注意すべきは $\Delta \neq 0$ であるから，$w_0,\ w_1,\ \cdots,\ w_p$ は一次的独立である．従って $\mathbf{V}_q$ は $p+1$ 個の独立なベクトルを含むから $\mathbf{V}_{p+1}$ と一致する．よって $\mathbf{C}_p$ は既約であると早合点をしては困ることである．我々は単に形式的に $A_r u^{p-r} v^r$ を z_r と置いたのであるが，(12.7) の中で $A_0,\ A_1,\ \cdots,\ A_p$ の中には 0 のものがあって差支えない．そうすれば $w_0,\ w_1,\ \cdots,\ w_p$ の間には，(12.9) からわかるように，一次関係があるから，独立ではない．$q < p+1$ のためには必ずこのようなものがある筈である．わかったことは，(12.7) のような多項式が $\mathbf{V}_q$ に属するときには，その 0 でない係数をもった単項式の各が，$\mathbf{V}_q$ に属することである．ところで，$\mathbf{V}_q$ に属する多項式 (12.7) が存在する以上，$A_0,\ A_1,\ \cdots,\ A_p$ の中で少くとも一つは 0 でない．そこで例えば $A_k \neq 0$ とすれば，$A_k u^{p-k} v^k = z_k$ は $w_0,\ \cdots,\ w_p$ の一次結合であるから，$u^{p-k} v^k$ は $\mathbf{V}_q$ に属する．

単項式 $u^{p-k} v^k$ が $\mathbf{V}_q$ に属すれば，これに変換 (12.3) を施した $(ua+vc)^{p-k} \times (ub+vd)^k$ もこれに属する．従って $u^p a^{p-k} b^k$ もこれに属する．ユニタリ変換の係数 $a,\ b$ は特別の場合を除き，0 でないから —— 実は $a,\ b$ も 0 でないものが一つでもあれば十分なのであるが ——，u^p も $\mathbf{V}_q$ に属する．これから更に $(ua+vc)^p$ が $\mathbf{V}_q$ に属し，これを展開して $a,\ c$ いずれも 0 でない変換があることから，$\mathbf{V}_q$ が総べての多項式 (12.2) を含んでいることがわかる．従って $\mathbf{V}_q = \mathbf{V}_{p+1}$，即ち '$\mathbf{C}_p$ は既約である.'

z 軸のまわりの角 ω の回転に対して，表現 $\mathbf{C}_p$ の基底は

$$u'^{p-r}v'^{r}=e^{-i(p/2-r)\omega}u^{p-r}v^{r} \qquad (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ p)$$

なる変換をなすことから，z 軸のまわりの角速度 1 $(d\omega/dt=1)$ の無限小回転の‘速度’が

$$\frac{d(u^{p-r}v^{r})}{dt}=-i\left(\frac{p}{2}-r\right)u^{p-r}v^{r}\ (=R_3u^{p-r}v^{r}=-iCu^{p-r}v^{r})$$

で与えられ，従って $u^{p-r}v^{r}$ が $C=iR_3$ の固有値 $(p/2-r)$ に対する固有ベクトルであることがわかる．固有値の最大のものは $p/2$ であるから，$\mathbf{C}_p$ の表現空間において，§10 に記したような $\mathbf{D}_{p/2}$ の基底の構成を行って，次々と C の固有値 $p/2-r$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ p)$ に対する固有ベクトルを作れば，C の各の固有値に属する固有空間は一次元であるから，$\mathbf{D}_{p/2}$ の基底は $\mathbf{C}_p$ の基底と高々定因数の差異を除き，一致しなければならない．よって‘$\mathbf{C}_p$ は本質的には，$\mathbf{D}_{p/2}$ と差異のないものである.’或いは‘この二つの表現は同値である’ことが証明された．そうすれば一方の既約性は他方の既約性の当然の帰結になる．本書には両方の既約性の証明を別々に与えたが，一方は蛇足であった．

ついでに $\mathbf{C}_p$ の基底 $u^{p-r}v^{r}$ と $\mathbf{D}_j$ の基底 $\mathbf{u}_r$ $(r=0,\ 1,\ \cdots,\ p)$ との関係を求めて置こう．この両者はいずれも行列 C の固有値 $p/2-r$ に対する固有ベクトルで，かつ $\mathbf{D}_j$ 或いはこれと同値な $\mathbf{C}_p$ においては C の固有空間はいずれも一次元であるから，高々定因数の差異があるに過ぎない：$\mathbf{u}_r=c_ru^{p-r}v^{r}$. かつ $u,\ v$ の絶対的の大きさに意味があるわけではないから，$c_0=1$ としても大した制限にはならない．そこで簡単のため

$$\mathbf{u}_0=u^{p}$$

として，この両辺に無限小変換 A を施せば，

$$\mathbf{u}_1=A\mathbf{u}_0=Au^{p}.$$

一般に，

$$\frac{d}{dt}(u^{p-r}v^{r})=(p-r)u^{p-r-1}v^{r}\frac{du}{dt}+ru^{p-r}v^{r-1}\frac{dv}{dt}$$

であるから，無限小変換 A に対しては (11.1) により

$$A(u^{p-r}v^r) = (p-r)u^{p-r-1}v^r Au + ru^{p-r}v^{r-1}Av$$
$$= (p-r)u^{p-(r+1)}v^{r+1}. \tag{12.10}$$

従って

$$\mathbf{u}_1 = pu^{p-1}v.$$

この両辺に再び A を施せば,

$$\mathbf{u}_2 = p(p-1)u^{p-2}v^2.$$

これを繰返して, r 回目には,

$$\mathbf{u}_r = p(p-1)\cdots\cdot(p-r+1)u^{p-r}v^r \tag{12.11}$$

が得られる. よって

$$c_r = p(p-1)\cdots\cdot(p-r+1) = \frac{p!}{(p-r)!} \tag{12.12}$$

であることが知られる.

ベクトル空間 $\mathbf{V}_n$ におけるベクトル成分の変換則は, 総べてのベクトルを通じて同一である. $\mathbf{C}_p$ の表現空間 $\mathbf{V}_{p+1}$ は u, v の p 次同次式の集合であるから, これに属するベクトルの一つとして,

$$(\xi u + \eta v)^p = \xi^p u^p + p\xi^{p-1}\eta u^{p-1}v + \cdots\cdot + \eta^p v^p$$
$$= \sum_{r=0}^{p} \binom{p}{r} \xi^{p-r}\eta^r u^{p-r}v^r \tag{12.13}$$

を含む. ここに

$$\binom{p}{r} = \frac{p!}{(p-r)!r!} \tag{12.14}$$

はいわゆる二項係数である. 従って $\mathbf{V}_{p+1}$ のベクトル成分 x_r $(r=0, 1, \cdots\cdot, p)$ は, ξ, η が $\mathbf{SU}_2$ に属する特殊ユニタリ変換 U により変換されるときに, $\binom{p}{r}\xi^{p-r}\eta^r$ と同じ変換を受けることがわかる. このことを

$$x_r \simeq \binom{p}{r}\xi^{p-r}\eta^r \qquad (r=0, 1, \cdots\cdot, p) \tag{12.15}$$

で表わす. $x_r \simeq y_r$ なるとき, x_r と y_r とは共傾に変換されるという.

$\mathbf{V}_{p+1}$ の基底として $u^{p-r}v^r$ $(r = 0, 1, \cdots, p)$ の代りに，これに定数を掛けた

$$\frac{1}{\sqrt{(p-r)!r!}}u^{p-r}v^r \qquad (r = 0, 1, \cdots, p) \tag{12.16}$$

をとれば，ベクトル成分 x_r の変換則は

$$x_r \simeq \frac{1}{\sqrt{(p-r)!r!}}\xi^{p-r}\eta^r \qquad (r = 0, 1, \cdots, p) \tag{12.17}$$

となる．このような基底を用いれば，ベクトル $\mathbf{x}$ の大きさの二乗は

$$\sum_{r=0}^{p} |x_r|^2 \simeq \sum_r \frac{|\xi|^{2(p-r)}|\eta|^{2r}}{(p-r)!r!} = \frac{1}{p!}\sum_r \binom{p}{r}\bar{\xi}^{p-r}\xi^{p-r}\bar{\eta}^r\eta^r$$

$$= \frac{1}{p!}(\bar{\xi}\xi + \bar{\eta}\eta)^p$$

となる．然るに $U \in \mathbf{SU}_2$ に対しては $\bar{\xi}\xi + \bar{\eta}\eta$ が不変であるから，$\mathbf{C}_p$ に属する変換に対しては

$$|x_0|^2 + |x_1|^2 + \cdots + |x_p|^2$$

が不変でこのような基底に対しては‘$\mathbf{C}_p$ はユニタリ表現になる.’従って $\mathbf{SU}_2$ の既約表現，或いは‘回転群の総べての既約表現 $\mathbf{D}_j$ はユニタリ表現と同値である.’*

ここで $\mathbf{C}_p$ を回転群 $\mathbf{R}$ の表現 $\mathbf{D}_j(j = p/2)$ と見る立場に一時戻ると，一つの回転 r に対応する $\mathbf{SU}_2$ の変換は二つあって，一方は U，他方は U に $-E$ を合成したもの：$U_1 = -U$ であることは前に述べた通りである．従って $\mathbf{C}_p$ において U と U_1 とに異なる変換が対応すれば，$\mathbf{D}_{p/2}$ は $\mathbf{R}$ の二価表現になる．$\mathbf{SU}_2$ における反転 $-E$ は，$\xi' = -\xi$, $\eta' = -\eta$ なる変換であるから，ξ, η の p 次の同次式は，この変換により，p が偶数ならばそのまま，奇数ならば符号が変わる．即ち p が偶数ならば U と U_1 とに対応する変換が等しく，奇数ならば異なる．よって表現‘$\mathbf{D}_j$ は j が整数ならば一価，半奇数なら

* このことから回転群の表現の完全可約性が知れる．

ば二価表現である.'

再び $\mathbf{SU}_2$ の表現 $\mathbf{C}_p$ を問題にし，これを簡単なものから調べて行くと，$\mathbf{C}_0$ は恒等表現，$\mathbf{C}_1$ は $\mathbf{SU}_2$ の自身による表現である．$\mathbf{C}_2$ は

$$x_0u^2 + x_1uv + x_2v^2 \tag{12.18}$$

の多項式の集合をその表現空間 $\mathbf{V}_3$ として持つ．この空間におけるベクトル成分の変換則は，(12.15) により，

$$x_0 \simeq \xi^2, \qquad x_1 \simeq 2\xi\eta, \qquad x_2 \simeq \eta^2 \tag{12.19}$$

で与えられる．これから

$$x_1{}^2 - 4x_0x_2 \simeq 0,$$

即ち $x_1{}^2 - 4x_0x_2$ が $\mathbf{C}_2$ に属する変換に対して不変であることがわかる．そこで

$$\left.\begin{aligned} x &= -x_0 + x_2, \\ y &= -i(x_0 + x_2), \\ z &= x_1 \end{aligned}\right\} \quad \text{或いは} \quad \left.\begin{aligned} x + iy &= 2x_2, \\ x - iy &= -2x_0, \\ z &= x_1 \end{aligned}\right\} \tag{12.20}$$

と置けば，

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + iy)(x - iy) + z^2 = x_1{}^2 - 4x_0x_2$$

で，$x^2 + y^2 + z^2$ が不変であることが知れる．従って $\mathbf{C}_2$ は三次元の直交群 $\mathbf{O}_3$ に含まれる．ところが $\mathbf{SU}_2$ に属する変換 U は，恒等変換 $\xi' = \xi$, $\eta' = \eta$ から連続的に移ることができる．従って $\mathbf{C}_p$ に属する任意の変換も，恒等変換 $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$ から連続的に移り得る．恒等変換に対してはその行列式は勿論 $+1$ である．これから連続的に変化する途中で，それが突然 -1 に変わることはないから，$\mathbf{C}_2$ の変換は全部行列式が $+1$ の直交変換即ち回転である．然もこれが実空間における回転であることは次のようにして示される．

u, v の二次式 (12.18) の一つとして，前の $(\xi u + \eta v)^2$ の代りに，ξ_1, η_1 を ξ, η と同じ変換されるものとして，もう少し一般の

$$(\xi_1u + \eta_1v)(\xi u + \eta v) = \xi_1\xi u^2 + (\xi_1\eta + \xi\eta_1)uv + \eta_1\eta v^2 \tag{12.21}$$

をとってもよい. そうすれば x_0, x_1, x_2 の変換則は,

$$x_0 \simeq \xi_1\xi, \qquad x_1 \simeq \xi_1\eta + \xi\eta_1, \qquad x_2 \simeq \eta_1\eta \tag{12.22}$$

となる. ところで, ξ_1, η_1 が ξ, η と同じ変換を受けることから, 特殊一次変換に対し $\xi\eta_1 - \eta\xi_1$ が不変であることが次のようにして証明される:

$$\begin{aligned}\xi'\eta_1' - \eta'\xi_1' &= \begin{vmatrix}\xi' & \eta' \\ \xi_1' & \eta_1'\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a\xi + b\eta & c\xi + d\eta \\ a\xi_1 + b\eta_1 & c\xi_1 + d\eta_1\end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix}a & b \\ c & d\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\xi & \eta \\ \xi_1 & \eta_1\end{vmatrix} = \xi\eta_1 - \eta\xi_1.\end{aligned} \tag{12.23}$$

((12.3) による)

ユニタリ変換においては勿論 $\bar{\xi}\xi + \bar{\eta}\eta$ が不変であるから, この二つを比較して, $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ が $(\eta_1, -\xi_1)$ と同様に変換されることがわかる. 従って (12.22) により,

$$x_0 \simeq -\bar{\eta}\xi, \qquad x_1 \simeq \bar{\xi}\xi - \bar{\eta}\eta, \qquad x_2 \simeq \bar{\xi}\eta. \tag{12.24}$$

或いは (12.20) により, x, y, z と ξ, η との関係は

$$x \simeq \bar{\eta}\xi + \bar{\xi}\eta, \qquad y \simeq i(\bar{\eta}\xi - \bar{\xi}\eta), \qquad z \simeq \bar{\xi}\xi - \bar{\eta}\eta \tag{12.25}$$

となる. 然るに複素数 $c = a + bi$ の実数部分は $\mathrm{Re}(c) = a = \dfrac{1}{2}(c + \bar{c})$, 虚数部分は $\mathrm{Im}(c) = b = -\dfrac{1}{2}i(c - \bar{c})$ で与えられるから, (12.25) は

$$x \simeq 2\mathrm{Re}(\bar{\xi}\eta), \quad y \simeq 2\mathrm{Im}(\bar{\xi}\eta), \quad z \simeq |\xi|^2 - |\eta|^2 \tag{12.26}$$

と書かれ, これらの式の右辺は ξ, η がどう変っても常に実数であるから, その間の変換係数も実数である. よって U に対応して (x, y, z) は実回転に対する変換を受ける. 逆に任意の回転に対して $\mathbf{C}_2$ の一つの変換が対応することをいえば, $\mathbf{C}_2$ と $\mathbf{R}$ とは本質的に差違がない. 基底を適当にとれば一致することがいえる. このことは, $\mathbf{SU}_2$ 並びに $\mathbf{R}$ の既約表現は, その次元数により定まり, かつ $\mathbf{R}$ の三次元既約表現は $\mathbf{R}$ 自身しかないことから明かである.

対応 (12.25) は, ユニタリ変換において $\bar{\xi}\xi + \bar{\eta}\eta =$ 一定 なることを顧慮すれば, 第1章で立体射影につき得られた, 球面上の点と複素平面上の点 ζ と

の斉次座標 ξ, η の対応 (3.3) と全く同じである．従って，回転を複素平面上の斉次座標 ξ, η の変換で表わすことは，ξ, η の間に行列式1のユニタリ変換を施すことに当る．前節に記したパラメタ記述の一つの幾何学的解釈が得られたわけである．或いはもとの複素数 ζ に戻れば，回転は

$$\zeta' = \frac{c + d\zeta}{a + b\zeta} \qquad (ad - bc = 1) \tag{12.27}$$

なる ζ の一次変換で与えられる．（複素函数論では分母子がいずれも ζ の一次式である分数で表わされる変換を一次変換という．我々がベクトルについていった一次変換とは違うから注意を要する．）(12.27) の変換の群は複素函数論，特に automorphic function の理論で大きな役割を演ずる．

もっと具体的の問題として，(12.19) の関係は，回転の行列 (1.1) をパラメタ κ, λ, μ, ν 或いは a, b, c, d で表わすのに用いられる．即ち

$$\begin{aligned}
\xi'^2 &= (a\xi + b\eta)^2 = a^2\xi^2 + 2ab\xi\eta + b^2\eta^2, \\
2\xi'\eta' &= 2(a\xi + b\eta)(c\xi + d\eta) \\
&= 2ac\xi^2 + 2(bc + ad)\xi\eta + 2bd\eta^2, \\
\eta'^2 &= (c\xi + d\eta)^2 = c^2\xi^2 + 2cd\xi\eta + d^2\eta^2
\end{aligned}$$

から，

$$\begin{aligned}
x_0' &= a^2x_0 + abx_1 + b^2x_2, \\
x_1' &= 2acx_0 + (bc + ad)x_1 + 2bdx_2, \\
x_2' &= c^2x_0 + cdx_1 + d^2x_2
\end{aligned}$$

が得られる．これは (12.20) により，

$$\left.\begin{aligned}
x' &= \frac{1}{2}(a^2 - b^2 - c^2 + d^2)x + \frac{i}{2}(-a^2 - b^2 + c^2 + d^2)y \\
&\quad - (ab - cd)z, \\
y' &= \frac{i}{2}(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)x + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)y \\
&\quad - i(ab + cd)z, \\
z' &= (-ac + bd)x + i(ac + bd)y + (ad + bc)z
\end{aligned}\right\} \tag{12.28}$$

と書き直すことができる．即ち，回転の行列として，

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Re}(a^2-b^2) & \mathrm{Im}(a^2+b^2) & -2\mathrm{Re}(\bar{a}b) \\ -\mathrm{Im}(a^2-b^2) & \mathrm{Re}(a^2+b^2) & 2\mathrm{Im}(\bar{a}b) \\ 2\mathrm{Re}(a\bar{b}) & 2\mathrm{Im}(a\bar{b}) & |a|^2-|b|^2 \end{bmatrix} \tag{12.29}$$

を得る．a, b, c, d の代りに Cayley-Klein のパラメタ $\alpha=a$, $\beta=-ic$, $\gamma=ib$, $\delta=d$ を用いれば，回転の変換行列は

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2) & \frac{i}{2}(-\alpha^2-\beta^2+\gamma^2+\delta^2) & i(\alpha\gamma+\beta\delta) \\ \frac{i}{2}(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2) & \frac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2) & -\alpha\gamma+\beta\delta \\ -i(\alpha\beta+\gamma\delta) & -\alpha\beta+\gamma\delta & \alpha\delta+\beta\gamma \end{bmatrix} \tag{12.30}$$

で与えられる．或いは，$a=\kappa-i\nu$, $b=-\mu-i\lambda$ を代入して，

$$\begin{bmatrix} \kappa^2+\lambda^2-\mu^2-\nu^2 & 2(-\kappa\nu+\lambda\mu) & 2(\kappa\mu+\lambda\nu) \\ 2(\kappa\nu+\lambda\mu) & \kappa^2-\lambda^2+\mu^2-\nu^2 & 2(-\kappa\lambda+\mu\nu) \\ 2(-\kappa\mu+\lambda\nu) & 2(\kappa\lambda+\mu\nu) & \kappa^2-\lambda^2-\mu^2+\nu^2 \end{bmatrix} \tag{12.31}$$

が $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ で表わした回転の変換行列である．

更に (12.29) に，(11.27)：

$$a=\cos\frac{\theta}{2}e^{-i(\varphi+\psi)/2}, \qquad b=-\sin\frac{\theta}{2}e^{-i(\varphi-\psi)/2},$$

したがって

$$\mathrm{Re}(a^2)=\cos^2\frac{\theta}{2}\cos(\varphi+\psi), \qquad \mathrm{Im}(a^2)=-\cos^2\frac{\theta}{2}\sin(\varphi+\psi),$$

$$\mathrm{Re}(b^2)=\sin^2\frac{\theta}{2}\cos(\varphi-\psi), \qquad \mathrm{Im}(b^2)=-\sin^2\frac{\theta}{2}\sin(\varphi-\psi),$$

$$ab=-\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi}=-\frac{1}{2}\sin\theta\, e^{-i\varphi},$$

$$a\bar{b}=-\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\psi}=-\frac{1}{2}\sin\theta\, e^{-i\psi}$$

を代入すれば，Euler の角 θ, φ, ψ によって表わした回転の行列

$$\begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\cos\psi, & -\cos\theta\cos\varphi\sin\psi-\sin\varphi\cos\psi, & \sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi, & -\cos\theta\sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi, & \sin\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta\cos\psi & \sin\theta\sin\psi & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (12.32)$$

が得られる．これが§3 のものの転置，或いは逆行列になっているのは，前には，定ベクトルの二つの異なる座標系に対する変換であり，今度のは，回転したベクトルの同一座標系における成分の変換であるからである．

行列 (12.32) は，(11.26) に対応した三つの回転の合成

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

からも容易に求められる．

量子力学的応用には $\mathbf{D}_j$ のユニタリ基底を

$$\psi_m=\frac{u^{j+m}v^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} \qquad (m=j,\ j-1,\ \cdots,\ -j) \quad (12.33)$$

のように番号をつけるのが便利である．そうすれば z 軸のまわりの無限小変換 $R_3=-iC$ に対して，

$$C\psi_m=m\psi_m \qquad (m=j,\ j-1,\ \cdots,\ -j) \quad (12.34)$$

なる関係が成立つ．前節に用いた基底 $\mathbf{u}_r$ と ψ_m との関係は，(12.11) により，

$$\mathbf{u}_{j-m}=(2j)!\sqrt{\frac{(j-m)!}{(j+m)!}}\psi_m \quad (m=j,\ j-1\ \cdots,\ -j) \quad (12.35)$$

である．この基底に対しては，(10.32) により，

$$\left.\begin{aligned} A\psi_m&=\sqrt{(j+m)(j-m+1)}\psi_{m-1}, \\ -2B\psi_m&=\sqrt{(j-m)(j+m+1)}\psi_{m+1}, \\ C\psi_m&=m\psi_m \end{aligned}\right\} \quad (12.36)$$

の関係が成立つ.

或いは

$$J_x = iR_1, \qquad J_y = iR_2, \qquad J_z = iR_3 \tag{12.37}$$

の記号を用いると，これらは (10.21) により交換関係

$$J_yJ_z - J_zJ_y = iJ_x, \quad J_zJ_x - J_xJ_z = iJ_y, \quad J_xJ_y - J_yJ_x = iJ_z \tag{12.38}$$

を満たし，(12.36) は

$$\left.\begin{aligned}(J_x + iJ_y)\psi_m &= \sqrt{(j-m)(j+m+1)}\psi_{m+1},\\ (J_x - iJ_y)\psi_m &= \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\psi_{m-1},\\ J_z\psi_m &= m\psi_m\end{aligned}\right\} \tag{12.39}$$

と書き直される. (12.39) から

$$\begin{aligned}(J_x - iJ_y)(J_x + iJ_y)\psi_m &= \sqrt{(j-m)(j+m+1)}(J_x - iJ_y)\psi_{m+1}\\ &= \sqrt{(j-m)(j+m+1)(j+m+1)(j-m)}\psi_m\\ &= (j-m)(j+m+1)\psi_m.\end{aligned}$$

一方

$$\begin{aligned}&(J_x - iJ_y)(J_x + iJ_y)\psi_m\\ &= \{J_x^2 + J_y^2 + i(J_xJ_y - J_yJ_z)\}\psi_m\\ &= \{J_x^2 + J_y^2 - J_z\}\psi_m.\end{aligned}$$

よって

$$\{J_x^2 + J_y^2 + J_z^2\}\psi_m = j(j+1)\psi_m \tag{12.40}$$

の関係が得られる.

$\mathbf{D}_j$ のユニタリ基底が求められたついでに，そのユニタリ表現行列を求めておこう. $\mathbf{D}_j$ 表現空間におけるベクトル成分は，(12.17) により，

$$\frac{\xi^{j+m}\eta^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} \qquad (m = j,\ j-1,\ \cdots,\ -j) \tag{12.41}$$

と同じに変換されるから，パラメタ a, b, $\bar{a}$, $\bar{b}$ で表わされる回転 r に対応するユニタリ既約表現行列の成分 $D^j{}_{mm'}(r)$ は

$$\frac{\xi'^{j+m}\eta'^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} = \frac{(a\xi + b\eta)^{j+m}(-\bar{b}\xi + \bar{a}\eta)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} \tag{12.42}$$

における

$$\frac{\xi^{j+m'}\eta^{j-m'}}{\sqrt{(j+m')!(j-m')!}} \tag{12.43}$$

の係数として求められる.

(12.42) の右辺の分子を二項定理によって展開すれば,

$$\sum_{\mu}\binom{j+m}{\mu}a^{j+m-\mu}b^{\mu}\xi^{j+m-\mu}\eta^{\mu}\sum_{\nu}\binom{j-m}{\nu}(-)^{\nu}\bar{a}^{j-m-\nu}\bar{b}^{\nu}\xi^{\nu}\eta^{j-m-\nu}$$

$$=\sum_{\mu,\nu}(-)^{\nu}\binom{j+m}{\mu}\binom{j-m}{\nu}a^{j+m-\mu}\bar{a}^{j-m-\nu}b^{\mu}\bar{b}^{\nu}\xi^{j+m+\nu-\mu}\eta^{j-m-\nu+\mu}$$

となる. この中から $m+\nu-\mu=m'$ の項を集め,

$$\sqrt{\frac{(j+m')!(j-m')!}{(j+m)!(j-m)!}}$$

を掛ければ $D^j{}_{mm'}(r)$ が求められる. よって

$$D^j{}_{mm'}(r)=\sum_{\nu}(-)^{\nu}\frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{(j+m'-\nu)!(j-m-\nu)!(m-m'+\nu)!\nu!}$$
$$\cdot a^{j+m'-\nu}\bar{a}^{j-m-\nu}b^{m-m'+\nu}\bar{b}^{\nu}. \tag{12.44}$$

ただし ν についての加え算は負の階乗が現われない範囲で行い, かつ $0!=1$ とする. 例えば $m=j$ に対しては, 分母の第二番目が負の階乗にならないためには $\nu=0$ だけが残って, 簡単に (m' のかわりに m とかいて)

$$D^j{}_{jm}(r)=\sqrt{\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!}}a^{j+m}b^{j-m} \tag{12.45}$$

となる. 一般式はやや面倒であるが, j の値が与えられているときには, 直接 (12.42) を展開して, 数値的に求めれば簡単である.

回転を表わすパラメタとして, a, b の代りに他の変数を用いて表現行列を表わしてみよう. 例えば (11.27) により Euler の角 θ, φ, ψ を用いて示せば,

$$D^j{}_{mm'}(\theta,\varphi,\psi)=\sum_{\nu}(-)^{m-m'+\nu}\frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{(j+m'-\nu)!(j-m-\nu)!(m-m'+\nu)!\nu!}$$
$$\cdot e^{-im\varphi}\cos^{2j+m'-m-2\nu}\frac{\theta}{2}\sin^{m-m'+2\nu}\frac{\theta}{2}e^{-im'\psi}. \tag{12.46}$$

これは回転 $r(\theta, \varphi, \psi)$ を §11 でやったように，z, Y, z' 軸のまわりの回転 $r_z(\varphi)$, $r_Y(\theta)$, $r_{z'}(\psi)$ の合成として，

$$U(r_z(\varphi)) = \text{対角行列}\,(e^{-im\varphi}, e^{-i(m-1)\varphi}, \cdots, e^{im\varphi}).$$

$r_Y(\theta)$ に対しては，

$$a = \bar{a} = \cos\theta/2, \qquad b = \bar{b} = -\sin\theta/2$$

であることを考慮すればもっと簡単に求められる．ここで

$$D^j{}_{mm'}(\theta, \varphi, \psi) = e^{-im\varphi}e^{-im'\psi}P_{mm'}(z), \qquad z = \cos\theta,$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+z}{2}}, \qquad \sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-z}{2}}, \qquad m \geqq m' \tag{12.47}$$

とおけば，

$$P_{mm'}(z) = (-)^{m-m'}\frac{1}{(m-m')!}\sqrt{\frac{(j+m)!(j-m')!}{(j+m')!(j-m)!}}\left(\frac{1+z}{2}\right)^j\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{m-m'}{2}}$$

$$\cdot\sum_\nu \frac{(j+m')(j+m'-1)\cdots(j+m'-\nu+1)\cdot(j-m)(j-m-1)\cdots(j-m-\nu+1)}{(m-m'+1)(m-m'+2)\cdots(m-m'+\nu)\cdot\nu!}$$

$$\cdot\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^\nu. \tag{12.48}$$

$\sum_\nu$ の部分は

$$\sum_\nu \frac{(-j-m')(-j-m'+1)\cdots\cdots(-j-m'+\nu-1)}{(m-m'+1)(m-m'+2)}$$

$$\cdot\frac{(-j+m)(-j+m+1)\cdots\cdots(-j+m+\nu-1)}{\cdots\cdots(m-m'+\nu)\cdot\nu!}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^\nu$$

と書き直せば，

$$F(-j-m', -j+m, m-m'+1\,;(z-1)/(z+1)) \tag{12.49}$$

とかかれる．ただし，$F(\alpha, \beta, \gamma\,; x)$ は超幾何函数（この場合は多項式）である．

$$F(\alpha, \beta, \gamma\,; x) = (1-x)^{-\beta}F\left(\beta, \gamma, -\alpha, \gamma\,; \frac{x}{x-1}\right)$$

の変換公式を用いれば，上の (12.49) は

$$\left(\frac{2}{z+1}\right)^{j-m} F\left(-j+m,\ j+m+1,\ m-m'+1\ ;\ \frac{1-z}{2}\right)$$

となる．よって，

$$P_{mm'}(z)=(-)^{m-m'}\frac{1}{2^m(m-m')!}\sqrt{\frac{(j+m)!(j-m')!}{(j+m')!(j-m)!}}(1+z)^{\frac{m+m'}{2}}(1-z)^{\frac{m-m'}{2}}$$

$$\cdot F(-j+m,\ j+m+1,\ m-m'+1\ ;\ (1-z)/2)$$

$$=\frac{(-)^{m-m'}}{2^m}\sqrt{\frac{(j+m)!(j-m)!}{(j+m')!(j-m')!}}(1+z)^{\frac{m+m'}{2}}(1-z)^{\frac{m-m'}{2}}P_{j-m}^{(m-m',\ m+m')}(z).$$

(12.50)

($j-m$, $m-m'$, $m+m'$ は，j が半整数のときにも，正整数または0である．)

ただし，

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z)=\binom{n+\alpha}{n}F\left(-n,\ n+\alpha+\beta,\ \alpha+1\ ;\ \frac{1-z}{2}\right)$$

$$=\frac{(-)^n}{2^n n!}\frac{1}{(1-z)^\alpha(1+z)^\beta}\frac{d^n}{dz^n}\{(1-z)^{n+\alpha}(1+z)^{n+\beta}\}$$

(12.51)

は 'Jacobi の多項式' と称せられるものである*.

j が正整数 l または 0 のときには，

$$P_{l-m}^{(m,m)}(z)=\frac{2^m l!}{(l+m)!}\frac{d^m P_l}{dz^m}.$$

ただし $P_l(z)$ は l 次の Legendre 多項式である．よって

$$D^l{}_{m0}(\theta,\ \varphi,\ \psi)=e^{-im\varphi}(-)^m\sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m P_l}{dz^m}$$

$$=(-)^m e^{-im\varphi}\sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\sin^m\theta\ \frac{d^m}{(d\cos\theta)^m}P_l(\cos\theta)$$

$$=(-)^m\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\ Y_{l,-m}(\theta,\varphi). \qquad (12.52)$$

ただし $Y_{l,-m}(\theta,\ \varphi)$ は後述の球函数 (17.20) である．

---

* Jacobi の多項式については，犬井鉄郎，球函数，円壔函数，超幾何函数，68 頁以下を見よ．

$m' > m$ のときには，ν については $j-m \geqq \nu \geqq m'-m$ の加え算になる．そこで $\nu = m'-m+\kappa$ と置けば，

$$D_{mm'}(r) = (-)^{m'-m} \sum_{\kappa} (-)^{\kappa} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{(j+m-\kappa)!(j-m'-\kappa)!\kappa!(m'-m+\kappa)!}$$
$$\cdot a^{j+m-\kappa}\bar{a}^{j-m'-\kappa}b^{\kappa}\bar{b}^{m'-m+\kappa}$$

となるから，

$$D_{mm'}(r) = (-)^{m'-m} D_{m'm}(r) \tag{12.53}$$

である．

§13. 回転群の積表現の簡約

次に回転群の二つの既約表現 D_j, $\mathsf{D}_{j'}$ の‘積表現 $\mathsf{D}_j \times \mathsf{D}_{j'}$ の簡約’について考えよう．D_j, $\mathsf{D}_{j'}$ の表現空間の基底をそれぞれ $\mathbf{u}_j$, $\mathbf{u}_{j-1}$, $\cdots$, $\mathbf{u}_{-j}$; $\mathbf{u}'_{j'}$, $\mathbf{u}'_{j'-1}$, $\cdots\cdots$, $\mathbf{u}'_{-j'}$ とすれば，積表現 $\mathsf{D}_j \times \mathsf{D}_{j'}$ の基底は $\mathbf{u}_m \times \mathbf{u}'_{m'}$ なる $(2j+1)(2j'+1)$ 個の積である．然るに積 $\mathbf{u}_m \times \mathbf{u}'_{m'}$ は，z 軸のまわりの回転により $e^{im\omega}e^{im'\omega} = e^{i(m+m')\omega}$ の因数を得る．従って無限小回転の行列 C の固有値は $M = m+m'$ である．$|m| \leqq j$, $|m'| \leqq j'$ に対して，可能な M の値は次の表で与えられる：

$(m=j)$	$M=j+j'$,	$j+j'-1$,	$j+j'-2$,	$\cdots$,	$j-j'$			
$(m=j-1)$		$j+j'-1$,	$j+j'-2$,	$\cdots$,	$j-j'$,	$j-j'-1$		
$(m=j-2)$			$j+j'-2$,	$\cdots$,	$j-j'$,	$j-j'-1$,	$j-j'-2$	
		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
$(m=-j)$					$-j+j'$, $\cdots$		$\cdots$, $-j-j'$	

$\mathsf{D}_j \times \mathsf{D}_{j'} = \mathsf{D}_{j'} \times \mathsf{D}_j$ であるから，$j \geqq j'$ と仮定しても差支ない．そうすると，積表現において，最大の固有値 $M = j+j'$ は一回，次に大きい $M = j+j'-1$ は二回，次に大きい $M = j+j'-2$ は三回と，M が1減るごとに現われる回数が1ずつ増し，$M = j-j'$ に至って $(2j'+1)$ 回現われる．これ

より小さい固有値の正または 0 なるものは各同数 $(2j'+1)$ ずつ現われる.

このことから，$\mathbf{D}_j \times \mathbf{D}_{j'}$ の表現空間において C の固有値 M に対する固有空間の次元数が次のようになることが知れる：

M	$j+j'$,	$j+j'-1$,	$j+j'-2$,	$\cdots\cdot$,	$j-j'$,	$j-j'-1$,	$\cdots\cdot$
次元数	1	2	3	$\cdots\cdot$	$2j'+1$	$2j'+1$	$\cdots\cdot$

これだけの準備をすれば，回転群の一般の表現を既約成分に分解したのと同じ方法で，$\mathbf{D}=\mathbf{D}_j \times \mathbf{D}_{j'}$ を簡約するのは容易である．上の表で，最大の固有値 $M=j+j'$ は一回だけ現われているから，$\mathbf{D}_{j+j'}$ は一回だけ $\mathbf{D}$ の中に含まれることがわかる．これによって $M=j+j', j+j'-1, \cdots\cdot$ に対する固有空間の各一次元が使われてしまう．これを取り去れば，残る最大の固有値：$M=j+j'-1$ に対する固有空間としては一次元のものしか余らないから，$\mathbf{D}_{j+j'-1}$ も一回だけ含まれる．その表現空間を取り除けば，固有値 $M=j+j'-1, j+j'-2, \cdots\cdot$ に対する固有空間がまた各一次元ずつ減る．これを繰返せば，最後に $M=j-j', j-j'-1, \cdots\cdot$ に対する固有空間が各一次元ずつ残り，丁度 $\mathbf{D}_{j-j'}$ の表現空間を与える．よって

$$\mathbf{D}_j \times \mathbf{D}_{j'} = \mathbf{D}_{j+j'} + \mathbf{D}_{j+j'-1} + \cdots\cdot + \mathbf{D}_{j-j'}$$

なる結果を得る．$j \geqq j'$ の制限を撤去するためには，最後の項を $\mathbf{D}_{|j-j'|}$ で置き換えればよい．即ち，一般に

$$\mathbf{D}_j \times \mathbf{D}_{j'} = \sum_J \mathbf{D}_J \qquad (J=j+j', j+j'-1, \cdots\cdot, |j-j'|) \quad (13.1)$$

と書くことができる．例えば，

$$\mathbf{D}_0 \times \mathbf{D}_j = \mathbf{D}_j,$$
$$\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_2 + \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_0,$$
$$\mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_{1/2} = \mathbf{D}_{3/2} + \mathbf{D}_{1/2}$$

等である．(13.1) の括弧の中の J の可能な値に対する条件は j, j', J の長さの線分が閉じた三角形を作るために必要な関係で，‘三角条件’と呼ばれる．

この $\mathbf{D}_j \times \mathbf{D}_{j'}$ の簡約を具体的に行うには，$\mathbf{D}_j$ の基底を $\mathbf{u}_m$，$\mathbf{D}_{j'}$ の基底を $\mathbf{u}'_{m'}$ として，$\mathbf{u}_m \times \mathbf{u}'_{m'}$ を基底とする空間において，$\mathbf{D}_J(J=j+j', j+j'-1, \cdots, |j-j'|)$ に従って変換されるベクトル $\mathbf{w}^J_M$ を求めることが必要である．これを行うのに，まず与えられた変換に対して，反傾な変換なるものを定義して置くのが便利である．

$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ が，一次変換 A により，

$$\xi_i' = \sum_k \xi_k a_{ki} \qquad (i,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{13.2}$$

に変わる際に，ξ_i の一次の同次式：

$$\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \cdots + \alpha_n\xi_n \tag{13.3}$$

の値が不変であるとき，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ の間の変換を A に反傾な変換という．反傾の関係は相互的である．即ち $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ が $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ に反傾に変換されれば，$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ は $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ に反傾に変換される．具体的には，

$$\sum_k \alpha_k'\xi_k' = \sum_{i,k} \xi_i a_{ik} \alpha_k' = \sum_i \alpha_i \xi_i$$

から，

$$\alpha_i = \sum_k a_{ik}\alpha_k' \qquad (i,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

が求められる．これを α_k' について解けば，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ の間の A に反傾な，求める変換則が得られるから，その変換行列は行列 A^{-1} の転置行列であることがわかる．

ここに与えた $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ を，$\xi_1, \cdots, \xi_n$ を基底としたベクトル空間 $\mathbf{V}_n$ のベクトル成分と考え，前のベクトルの一変換におけるベクトル成分 $(x_1, \cdots, x_n)$ の変換則と比較してみると，前の場合には，二つの基底 ξ_i, ξ_i' $(i=1, 2, \cdots, n)$ に対する‘成分 x_i は不変とし’，ベクトル自身が $\mathbf{x} \to \mathbf{x}'$ なる変化をなすとしたのに対し，今度は，‘ベクトル自身は不変として’，同一ベクトルの二つの異なる基底に対する成分の変換を問題にしたことになる．その差

異に御注意を願う.

二組の数 $\xi_1, \cdots, \xi_n; \eta_1, \cdots, \eta_n$ がいずれも $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ と反傾に変換されるときには, この二組の数は同じ変換をなす, 即ち共傾に変換されることは明かである.

u, v を (12.3) に従って変換される変数の対とし, α, β が u, v に反傾に変換される, 即ち $\alpha u+\beta v$ が不変であるとすれば,

$$(\alpha u+\beta v)^{2J} \qquad (J=0,\ 1/2,\ 1,\ \cdots) \tag{13.4}$$

も不変であるから, $\mathbf{D}_J$ の基底 $u^{2J}, u^{2J-1}v, \cdots, v^{2J}$ は $\alpha^{2J}, \alpha^{2J-1}\beta, \cdots, \beta^{2J}$ に反傾に変換される. u', v' を u, v と共傾に変換されるものとすれば, (13.4) の代りに

$$(\alpha u+\beta v)^p(\alpha u'+\beta v')^q \qquad (p+q=2J) \tag{13.5}$$

としたときにも, その $\alpha^{2J-r}\beta^r$ $(r=0, 1, \cdots, 2J)$ の係数は $\mathbf{D}_J$ の基底と同じ変換をなすから, この式の $\alpha^{J+M}\beta^{J-M}$ の係数が $\mathbf{D}_J$ の基底 $\mathbf{w}^J_M$ $(M=J, J-1, \cdots, -J)$ を与える.

我々の問題は

$$u^{2j-r}v^r u'^{2j'-s}v'^s \quad (r=0,\ 1,\ \cdots,\ 2j;\ s=0,\ 1,\ \cdots,\ 2j') \tag{13.6}$$

を基底とする $\mathbf{D}_j\times\mathbf{D}_{j'}$ の表現空間, 或いは (13.6) の一次結合より成る, u, v につき $2j$ 次, u', v' につき $2j'$ 次の同次多項式から, (13.5) のような多項式を作り出すことにより解決される. これは両者の次数が一致しないとき ($J<j+j'$ のとき) には無理な要求であるが, 幸いなことに, $u, v; u', v'$ から不変式 $uv'-u'v$ が作られることによって, この困難は簡単に解決される. この式が行列式1の一次変換に対して不変なことは既に証明済みである(§12). よって $J=j+j'-\lambda$ $(\lambda=0, 1, \cdots, 2j')$ に対して, $u, v; u', v'$ につき所要の次数を持った同次多項式

$$I_J=(uv'-u'v)^\lambda(\alpha u+\beta v)^{2j-\lambda}(\alpha u'+\beta v')^{2j'-\lambda} \tag{13.7}$$

が不変であるから, この式の $\alpha^{2J-t}\beta^t$ $(t=0, 1, \cdots, 2J)$ の係数を見出せば,

それが即ち求める $\mathbf{D}_j \times \mathbf{D}_{j'}$ を簡約して現われる $\mathbf{D}_J$ の基底 $\mathbf{w}_M^J$ である.

(13.7) の各項を二項定理により展開すれば,

$$(uv'-u'v)^\lambda=\sum_{\nu=0}^{\lambda}(-)^\nu\binom{\lambda}{\nu}u^{\lambda-\nu}v^\nu u'^\nu v'^{\lambda-\nu},$$

$$(\alpha u+\beta v)^{2j-\lambda}=\sum_{\sigma=0}^{2j-\lambda}\binom{2j-\lambda}{\sigma}\alpha^{2j-\lambda-\sigma}\beta^\sigma u^{2j-\lambda-\sigma}v^\sigma,$$

$$(\alpha u'+\beta v')^{2j'-\lambda}=\sum_{\tau=0}^{2j'-\lambda}\binom{2j'-\lambda}{\tau}\alpha^{2j'-\lambda-\tau}\beta^\tau u'^{2j'-\lambda-\tau}v'^\tau$$

であるから, I_J に対して,

$$I_J=\sum_\nu\sum_\sigma\sum_\tau(-)^\nu\binom{\lambda}{\nu}\binom{2j-\lambda}{\sigma}\binom{2j'-\lambda}{\tau}\alpha^{2(j+j'-\lambda)-(\sigma+\tau)}\beta^{\sigma+\tau}$$
$$\cdot\, u^{2j-(\sigma+\nu)}v^{\sigma+\nu}u'^{2j'-(\tau+\lambda-\nu)}v'^{\tau+\lambda-\nu}$$

というかなり面倒な式を得る. ここで $\sigma+\nu=j-m$, $\tau+\lambda-\nu=j'-m'$ と置けば, $\sigma+\tau=j+j'-\lambda-(m+m')=J-(m+m')$ となるから, これはまた

$$I_J=\sum_\nu\sum_m\sum_{m'}(-)^\nu\binom{\lambda}{\nu}\binom{2j-\lambda}{j-m-\nu}\binom{2j'-\lambda}{j'-m'+\nu-\lambda}$$
$$\cdot\,\alpha^{J+(m+m')}\beta^{J-(m+m')}u^{j+m}v^{j-m}u'^{j'+m'}v'^{j'-m'} \tag{13.8}$$

と書かれる. ここで,

$$\binom{2j'-\lambda}{j'-m'+\nu-\lambda}=\frac{(2j'-\lambda)!}{(j'-m'+\nu-\lambda)!(j'+m'-\nu)!}=\binom{2j'-\lambda}{j'+m'-\nu}$$

なることに注意し, $\alpha^{J+M}\beta^{J-M}$ の係数を求めれば,

$$\sum_\nu\sum_{m,m'}(-)^\nu\binom{\lambda}{\nu}\binom{2j-\lambda}{j-m-\nu}\binom{2j'-\lambda}{j'+m'-\nu}u^{j+m}v^{j-m}u'^{j'+m'}v'^{j'-m'} \tag{13.9}$$

となる. ただし m, m' についての和は $m+m'=M$ なる組について取る. このことは, 行列 C の固有値から考えても当然のことである. (13.9) が求める $\mathbf{D}_J$ $(J=j+j'-\lambda)$ の基底 $\mathbf{w}_M^J$ である.

これで $\mathsf{D}=\mathsf{D}_j\times\mathsf{D}_{j'}$ の既約成分の基底を求めることはできたが，D_j, $\mathsf{D}_{j'}$ がユニタリ表現であるとき，D もユニタリ表現であるようにするには，これに適当な因数を掛けて規準化しなければならない．そのためには，D_J の基底として

$$\psi_M^J=\frac{u^{J+M}v^{J-M}}{\sqrt{(J+M)!(J-M)!}}$$

の形のものを取ればよいから，

$$\gamma_M^J=\frac{\alpha^{J+M}\beta^{J-M}}{\sqrt{(J+M)!(J-M)!}}$$

と置けば，不変式 (13.4) は

$$(2J)!\sum\gamma_M^J\psi_M^J$$

となる．よって I_J: (13.8) に対しても γ_M^J の係数を求め，かつ D_j, $\mathsf{D}_{j'}$ の基底も同じく

$$\varphi_m=\frac{u^{j+m}v^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}},\qquad \chi_{m'}=\frac{u'^{j'+m'}v'^{j'-m'}}{\sqrt{(j'+m')!(j'-m')!}}$$

をとれば，全体に $\sqrt{(J+M)!(J'-M)!}$ が掛かる上に，各項にそれぞれ $\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j'+m')!(j-m')!}$ が乗ぜられる．ところで，この場合ユニタリというのは，これらの基底に関する同次多項式の係数 x_M の絶対値二乗の和が $\sum_{M=J}^{-J}|x_M|^2$ 不変ということで，基底自身の絶対的の大きさは定らないから，全体に共通な数係数は不定である．よって (13.9) の中から二項係数の分子 $\lambda!(2j-\lambda)!(2j'-\lambda)!$ を除けば ψ_M^J を $\varphi_m\chi_{m'}$ の一次結合として表わす式: $\psi_M^J=\sum c_{mm'}^J\varphi_m\chi_{m'}$ の係数は，各の J につき共通に掛かる数を除き，

$$c_{mm'}^J=\delta(M,\ m+m')\sum_\nu(-)^\nu$$

$$\cdot\frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j'+m')!(j'-m')!(J+M)!(J-M)!}}{(j-m-\nu)!(j+m-\lambda+\nu)!(j'+m'-\nu)!(j'-m'-\lambda+\nu)!\nu!(\lambda-\nu)!}\tag{13.10}$$

となる.

ユニタリ化されたこの行列成分を **Clebsch-Gordan 係数** または **Wigner 係数**と呼び $(jmj'm'|jj'JM)$, または $C^{JM}_{jj';\,mm'}$ と記すのが慣例である*. j, j' がはさまっているときには $(mm'|JM)$, 或いは $M=m+m'$ をも略して $(mm'|J)$ と記す. 変換行列をこのようにユニタリ化するには, 各の $\mathbf{D}_J$ に対し, 基底に共通の数を掛ければよいから, これは上の $c^J_{mm'}$ と m, m' に無関係な因数だけで異なる:

$$(mm'|J)=A_J c^J_{mm'}. \tag{13.11}$$

この因数 A_J を決定することは後に回わそう (§15).

(13.1) の公式から, 三つ以上の表現の積の簡約も簡単に行われる. 例えば

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_1\times\mathbf{D}_1\times\mathbf{D}_{1/2}&=(\mathbf{D}_2+\mathbf{D}_1+\mathbf{D}_0)\times\mathbf{D}_{1/2}\\&=\mathbf{D}_2\times\mathbf{D}_{1/2}+\mathbf{D}_1\times\mathbf{D}_{1/2}+\mathbf{D}_0\times\mathbf{D}_{1/2}\\&=(\mathbf{D}_{5/2}+\mathbf{D}_{3/2})+(\mathbf{D}_{3/2}+\mathbf{D}_{1/2})+\mathbf{D}_{1/2}\\&=\mathbf{D}_{5/2}+2\mathbf{D}_{3/2}+2\mathbf{D}_{1/2}\end{aligned}$$

となり, $\mathbf{D}_1\times\mathbf{D}_1\times\mathbf{D}_{1/2}$ には既約表現 $\mathbf{D}_{5/2}$ が一回, $\mathbf{D}_{3/2}$, $\mathbf{D}_{1/2}$ が各二回ずつ含まれることがわかる.

なお回転群 $\mathbf{R}$ を広義回転群 $\mathbf{R}'$ に拡張したときには, $\mathbf{D}_j$ は偶表現および奇表現に分れることは既に記したが, その積表現の反転指標は各因子の反転指標の積であるから, '偶表現と偶表現または奇表現と奇表現の積は偶表現, 偶表現と奇表現の積は奇表現である.'

我々が普通テンソルと呼ぶものは, 三次空間の何個かのベクトル成分の積と同じ変換則を持つ量である. 回転群に対してベクトル成分は既約表現 $\mathbf{D}_1^-$ に従って変換されるから, 例えば二階のテンソルは $\mathbf{D}_1^-\times\mathbf{D}_1^-$ のような変換則を有し, これは $\mathbf{D}_0^+$, $\mathbf{D}_1^+$, $\mathbf{D}_2^+$ の三つの既約表現に分かれる. $\mathbf{D}_0^+$ に属するものはスカラー積 $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$ で, $\mathbf{D}_1^+$ に属するのはベクトル積 (9.1)

---

* $(jj'mm'|jj'JM)$ と記す流儀もある.

である．$\mathbf{D}_2^+$ に従って変換されるのは二階対称テンソルの一種，後に示す二次の球函数を基底とするものである．このようにして，第3章の始めに提起したテンソルを独立な成分に分解する問題は解決した．r 階テンソルに含まれる独立な成分は $\underbrace{\mathbf{D}_1^- \times \mathbf{D}_1^- \times \cdots\cdots \times \mathbf{D}_1^-}_{r\text{個}}$ を既約成分に分解することにより得られる．例えば (9.3) は $\mathbf{D}_1^- \times \mathbf{D}_1^- \times \mathbf{D}_1^-$ に含まれる $\mathbf{D}_0^-$ に属する．これは純粋回転により不変，反転により符号を変える．このように二階テンソルに含まれるのはギベクトル，三階テンソルに含まれるのはギスカラーであることも甚だ自然に了解される．

このようにして得られる量は $\mathbf{D}_j$ の j が整数のものばかりである．従ってもう一つの疑問：回転に伴って定まった一次変換をなす量はテンソルに限るかという問題の解答は否定的である．即ちテンソルのほかに j が半奇数の $\mathbf{D}_j$ に従って変換される量が存在する．その最も簡単なものはスピノル ξ, η である．$\mathbf{D}_{1/2} \times \mathbf{D}_{1/2} = \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_0$ のように二つのスピノルの成分の積からは普通のテンソル成分も作られる，よって我々が求めた量は $\mathbf{SU}_2$ に属する変換を受ける二次元複素ベクトル空間——これをスピン空間と呼ぶ——におけるテンソル量である．これらのスピン空間のテンソルをも，一般に**スピノル**の名で呼ぶことがあって，その算法をスピノル解析と称し，$\mathbf{SU}_2$ を $\mathbf{SL}_2$ に拡張することにより，Lorentz 群の表現論において重大な役割を演ずるのであるが，本書の目的と直接の関係がないから，これについてはここでは触れないことにする．

§14.　指標，回転群のパラメタ空間の体積測定

一次変換 A の行列 A は，基底の取り方によって変わる．即ち同値な行列に変形されるから，与えられた群の表現に対する行列表現は一義的でない．しかしこれら同値な行列に共通な量，即ち変換 A により定まる不変的な量として，行列の対角和，即ち跡 Sp(A) が存在することは，我々の前に知ったことであ

る．群 **G** の表現 **D** において，元 r に対応する変換 $\mathrm{A}(r)$ の跡，即ち行列 $A(r)$ の対角和を，r の函数と考えたときには：$\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}(r))=\chi(r)$，これを表現 **D** の**指標**と呼ぶ．従って‘同値な表現は同一の指標を持つ.’ かつ $A(e)=E$ であるから，‘単位元に対する指標の値は’ $1+1+\cdots\cdots+1=n$，即ち‘表現の次元数に等しい.’

表現条件により，

$$A(a^{-1}ra)=A^{-1}(a)A(r)A(a)$$

であるから，$A(a^{-1}ra)$ は $A(r)$ を $A(a)$ で変形した行列である．従ってその跡が等しい：

$$\chi(a^{-1}ra)=\chi(r). \tag{14.1}$$

r を **G** の一つの元，a をその任意の元としたとき，$a^{-1}ra$ 即ち r を a で変形したものの集合は一種の類を作る．それは，

(i) $r=e^{-1}re$,　　(ii) $s=a^{-1}ra$ ならば $r=asa^{-1}=(a^{-1})^{-1}sa^{-1}$,

(iii) $s=a^{-1}ra,\ t=b^{-1}sb$ ならば，$t=b^{-1}a^{-1}rab=(ab)^{-1}r(ab)$

で，同値条件 (6.11) を満足しているからである．この元の類を群 **G** の**共軛類**という．群元の分類には最も普通に用いられるので，断りなしに‘類’といえば‘共軛類’を意味する．(14.1) の関係は，‘同じ類に属する元は総べて同一の指標を持つ’ことを示している．指標のように一つの類の元に対して同一の値を有する群元の函数 $f(r)$ を**類函数**という．

二次元ユニタリ群においては，任意の元（行列）は対角形に変形され，かつその固有値 ϵ_1, ϵ_2 は絶対値 1 の数であるから $\mathbf{SU}_2\,(\epsilon_1\epsilon_2=1)$ の各元は

$$U_\epsilon=\begin{pmatrix}\epsilon & 0\\ 0 & 1/\epsilon\end{pmatrix},\qquad |\epsilon|=1 \tag{14.2}$$

に共軛である．ϵ は，その絶対値が 1 であるから，実数 ω を用いて $\epsilon=e^{i\omega/2}$ の形に書くことができる．それが z 軸のまわりの角 ω の回転に対応することは既に記した通りである．$\mathbf{D}_j$ に対する指標は，これを $\mathbf{C}_{2j}$ と考えれば，(12.6) により，

$$\chi_j = \epsilon^{2j} + \epsilon^{2j-2} + \cdots\cdots + \epsilon^{-2j} = \frac{\epsilon^{2j+1} - \epsilon^{-(2j+1)}}{\epsilon - \epsilon^{-1}} \qquad (14.3)$$

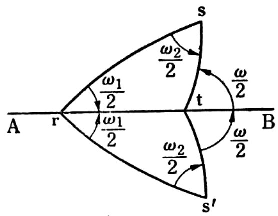
となる．或いは回転角 ω を用いれば，（分母子を $2i$ で割って，）

$$\chi_j(\omega) = \frac{\sin(2j+1)\omega/2}{\sin\omega/2} \qquad (14.4)$$

を得る．

$\mathbf{SU}_2$ に属する総べての行列が対角形に変形される，即ち任意の元が (14.2) と共軛であることから，表現条件により，$\mathbf{D}_1 = \mathbf{R}$ のきまった回転角 ω の回転が，回転軸の方向によらず，総べて同一の類に属することがわかる．これは直接次のように証明することもできる．

第5図の回転の合成の作図をもう一度参照する．s, s' を回転角 $= \omega_2$ の等しい二つの回転とし，それらの回転軸が単位球を貫く点を s, s′ とする．球面上で s, s′ を垂直に二等分する大円を AB とし，その上に任意に一点 r をとる．そして回転 r を r を軸とする $\omega_1 = 2\angle\mathrm{Brs} = 2\angle\mathrm{s'rB}$ の回転と定義すれば，第31図から明かなように，sr および rs' はいずれも t を回転軸とする角 $\omega = 2\angle\mathrm{Bts} = 2\angle\mathrm{s'tB}$ の回転に等しい．よって $sr = rs'$, $s' = r^{-1}sr$. すなわち回転角の等しい回転は同じ類に属する．



第31図

このように，回転群の既約表現 $\mathbf{D}_j$ ($j = 0,\ 1/2,\ 1,\ \cdots\cdots$) は各異なる指標を持っている．このことは一般の群の表現についても成立つことで，その名の示す如く，指標は群の各の既約表現を特徴付けるのに使用して最も便利な数である．表現の既約性の判定にも，また与えられた表現を既約成分に分解することも，指標を用いるのが最も簡単であって，元の数が有限の，いわゆる有限群の表現論では大いに活用されている．本書で今までのところこの方法を用いなかったのは，次の理由による．一つは純代数的の方法で，具体的に表現を構成したかったこと，もう一つは群元の全体についての和を作ることが，連続群では

パラメタ空間における‘体積測定’の問題を伴い，有限群のときのように簡単でないことである．そこでこの第二の問題を解決しておこう．

パラメタ空間というものが，元来与えられた連続群に対して一義的に定まらず，或る程度粘土細工のように連続的に変形してよいことは既に記した．従って，勝手にとった一つのパラメタ空間のユークリッド的体積を，その体積としてとることは意味がない．ところで，群元 r に対応するパラメタ空間の点 P は，群元 s に対応した変換により sr に対応する点 Q に移る．この変換に際して，P を含む体積 dV の各点が，a を含む体積 dV' に移ったとき，$dV' = dV$ という要請により‘体積’を定義すれば，パラメタ空間の変形に無関係に，(同一群の異なる種々の) パラメタ空間に共通の‘不変体積’を定義することができる．このことは，或る標準的なパラメタ空間 P_0 に対して，丁度そのユークリッド的体積が不変体積を与えるようなものと考えれば，変形により，ふくれたり，ちぢんだりしたときにも，体積として変形前の体積をとることに当たる．或いは，空間 P_0 に点をこまかく一様にマークしておいたと考えると，変形により点の密度が一定でなくなるといってもよかろう*．こういう場合に不変体積を定義する方法については次の例が了解を助けると思われる．

流体が空間の或る部分で定常的に流れているとする．時刻 $t=0$ でその空間の一点 P_0 における dV_0 の体積を占めていた流体の実質部分が，時間 t の後，流れて来て P における dV の体積を占めるとする．流体がちぢまないもの，例えば水のようなものであれば，$dV = dV_0$ であるが，気体のように膨脹，収縮するものにあっては，一般に $dV \neq dV_0$ である．ただし dV の中の流体の実質部分は $t=0$ で dV_0 を占めていたのであるから，その質量には変りがない．よって流体の密度 σ を用いれば，$\sigma_0 dV_0 = \sigma dV$ の関係が常に成立つ．従って $dV = \alpha dV_0$ で，ここに $\alpha = \sigma_0/\sigma$ はいわゆる体積膨脹率である．

---

* 極の近くの面積が，或る種の投影法による地図では著しく拡大されることを思い浮べて頂きたい．一様な球面の膜を無理にこの地図のように平面上に引き延ばせば，極の近くは薄くのびてしまって，面密度がひどく小さくなることも了解されよう．

流体の実質部分というような言葉を用いる代りに，流体が非常に多数の‘分子’から成ると考えれば，事柄は更にわかり易い．そうすれば時刻 t に dV を占めている分子の全部は t_0 で dV_0 の中にあった分子ばかりである．その数を dN とする．(dN と書いたが dV 中に含まれる分子数の意味で，相当大きな数である．) 運動が定常的であるから，P における微小体積 dV の中には常に一定数 dN の分子が含まれている．そこで各分子が位置 P において持つ特徴を示す数，例えばその位置エネルギーを $f(\mathrm{P})$ とすれば，分子全体の持つ位置エネルギーの和は次のようにして求められる．P における体積 dV の中には dN の分子が含まれるから，考えている全体の空間を微小体積 dV に分ければ，上の和は $\sum f(\mathrm{P})dN$ となる．そこで分子の密度（単位体積当りの分子数で，μ を1個の分子の質量とすれば，質量密度 σ と $\sigma=\mu\rho$ の関係がある）を ρ とすれば，$dN/dV=\rho$ であるから，上記の和は，dV の大きさを0に近づけた極限において，

$$\int f(\mathrm{P})\rho dV \tag{14.5}$$

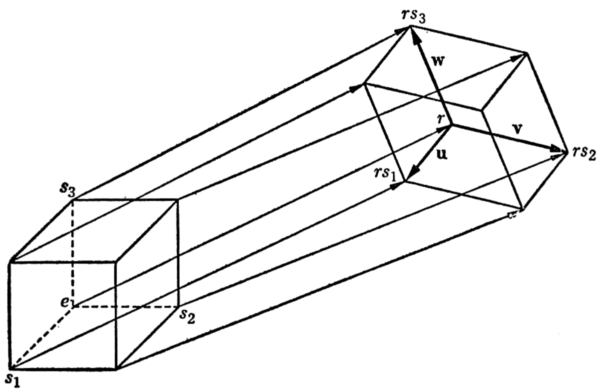
となり，単に $f(\mathrm{P})$ ではなく，これに粒子密度 ρ を掛けたものの積分となる．

回転群のパラメタ空間 **S** における群元の分布密度も上の考えから類推して理解することができる．その前に言葉を簡略にするため群の元 r に対応する **S** の点を‘点 r’と，同じ記号 r で表わして，‘代表する点’という形容詞の重複を避けることにしよう．**S** の原点 e において，dV_0 なる体積を考える．この中に含まれる回転群の元 s は，いずれも回転角の微小な，無限小回転である．この各の無限小回転 s に有限回転 r を合成すれば，原点 e は点 r に移り，dV_0 の中の点は rs なる点の集合 dV に移る．この移動による‘膨脹率’dV/dV_0 を求めれば，r における群元の密度を知ることができる．

原点における微小体積 dV_0 としては，e における x, y, z 方向の微小線素 dx, dy, dz の作る直方体の体積 $dxdydz$ をとる（密度を1ととる）のが当り前である．**S** の各点 r は，前にも記したように，$\overrightarrow{er}$ の方向を軸とする角 $\overline{er}$ の

回転を表わすから，x, y, z 方向といったのは回転軸の方向を指し，dx, dy, dz はそれぞれ x, y, z 軸のまわりの無限小回転角 $d\omega_1$, $d\omega_2$, $d\omega_3$ を意味する．

この微小直方体 dV_0 の各点に r を合成すれば，点 r における体積 dV が得られる．その際この $s \to rs$ の変換は連続的で，直方体 dV_0 は微小であるから dV は微小平行六面体となる．dV_0 の頂点をそれぞれ e, s_1, s_2, s_3 とすれば，dV の頂点は $re = r$, rs_1, rs_2, rs_3 である．dV の三稜を表わすベクトル，即ち r と rs_1, rs_2, rs_3 を結ぶベクトルを $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ とすれば，



第 32 図

その体積は

$$dV = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} \qquad (14.6)$$

で与えられる．よって我々の問題は，$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ の x, y, z 成分を求めることに帰着する．

回転群のパラメタ空間 $\mathbf{S}$ は，中心 e に対して球対称であるから，元の密度は中心からの距離，即ち回転角 ω の函数で，回転軸の方向 α, β, γ にはよらないと考えられる．よって r として z 軸のまわりの角 ω の回転；$(\omega;\ 0, 0,$

1）をとっても差支えない．これに対する Euler-Olinde-Rodrigues のパラメタは，(11.20) により，

$$\kappa' = \cos\frac{\omega}{2}, \qquad \lambda' = 0, \qquad \mu' = 0, \qquad \nu' = \sin\frac{\omega}{2}$$

である．これに対して，x 軸のまわりの無限小回転：$s_1(d\omega_1\,;\,1,\,0,\,0)$ に対しては，$d\omega_1$ の一乗までをとって，

$$\kappa = 1, \qquad \lambda = \frac{d\omega_1}{2}, \qquad \mu = 0, \qquad \nu = 0$$

であるから，rs_1 に対するパラメタは，四元数の乗法

$$q'' = q'q = \left(\cos\frac{\omega}{2} + \mathbf{k}\sin\frac{\omega}{2}\right)\left(1 + \mathbf{i}\,\frac{d\omega_1}{2}\right)$$

$$= \cos\frac{\omega}{2} + \mathbf{i}\cos\frac{\omega}{2}\frac{d\omega_1}{2} + \mathbf{j}\sin\frac{\omega}{2}\frac{d\omega_1}{2} + \mathbf{k}\sin\frac{\omega}{2}$$

から，

$$\kappa'' = \cos\frac{\omega}{2}, \qquad \lambda'' = \cos\frac{\omega}{2}\frac{d\omega_1}{2}, \qquad \mu'' = \sin\frac{\omega}{2}\frac{d\omega_1}{2}, \qquad \nu'' = \sin\frac{\omega}{2}$$

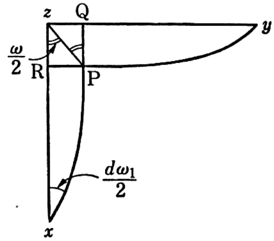
と求められ，従って rs_1 は回転 $\left(\omega\,;\,\cot\frac{\omega}{2}\frac{d\omega_1}{2},\,\frac{d\omega_1}{2},1\right)$ であることがわかる．同様に y 軸のまわりの $d\omega_2$ の回転に対しては，

$$q'' = \left(\cos\frac{\omega}{2} + \mathbf{k}\sin\frac{\omega}{2}\right)\left(1 + \mathbf{j}\,\frac{d\omega_2}{2}\right)$$

$$= \cos\frac{\omega}{2} - \mathbf{i}\sin\frac{\omega}{2}\frac{d\omega_2}{2} + \mathbf{j}\cos\frac{\omega}{2}\frac{d\omega_2}{2} + \mathbf{k}\sin\frac{\omega}{2}$$

により，rs_2 が回転 $\left(\omega\,;\,-\frac{d\omega_2}{2}\cot,\,\frac{\omega}{2}\frac{d\omega_2}{2},\,1\right)$ であることを知る．rs_3 は z 軸のまわりの $\omega + d\omega_3$ の回転であることは明かで，$(\omega + d\omega_3\,;\,0,\,0,\,1)$ であることは申すまでもない．Euler-Olinde-Rodrigues のパラメタと四元数乗法が甚だ有効に役立つことがここでも示された．r の回転軸の方向 $\alpha,\,\beta,\,\gamma$ を一般にとって，後に示す体積の式を求めることも，多少面倒になるが，同様に計算ができるから，読者の演習問題として残そう．

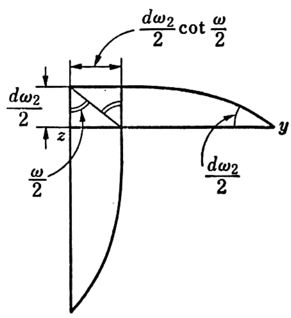
上記の方法は，回転群の表現論の一つの活用として興味があるが，多少間接的である．もっと直接に，直観的方法で，rs_1, rs_2 の合成を幾何学的に行って，その回転角および回転軸を求めるには次のようにすればよい．



第 33 図

第 33 図は単位球を z 軸の方から見た図である．大円弧 $\widehat{xz}$ と $d\omega_1/2$ なる角をなす大円弧 $\widehat{xQ}$ は，$\widehat{xz}=\pi/2$ であるから，z の附近で $\widehat{xz}$ と平行である．（経度線が赤道で平行になることを想起されたい．）z から $\widehat{xz}$ と $\omega/2$ の角をなす大円弧と $\widehat{xQ}$ との交りを P とすれば，P が rs_1 の回転軸の方向，角 zPQ が回転角の半分を与えることは既述の通りである．P から $\widehat{xz}$ に垂線 PR を下せば，$d\omega_1$ が微小角であるから，zRPQ は大体矩形で，rs_1 の回転角の半分は $z\mathrm{PQ}=\omega/2$ に等しい．その方向を示す余弦 α, β, γ は次のようにして定まる．

P と x との間の角は $\widehat{\mathrm{P}x}\fallingdotseq\widehat{\mathrm{R}x}$ であるから*，$\alpha=\cos\widehat{\mathrm{R}x}=\sin\widehat{\mathrm{R}z}\fallingdotseq\widehat{\mathrm{R}z}$. しかるに $\widehat{z\mathrm{Q}}=\mathrm{RP}=d\omega_1/2$ であるから $\alpha=\widehat{\mathrm{R}z}=\widehat{\mathrm{RP}}\cot\frac{\omega}{2}=\cot\frac{\omega}{2}\frac{d\omega_1}{2}$ である．また P と y との間の角は $\widehat{\mathrm{Q}y}=\frac{\pi}{2}-\widehat{z\mathrm{Q}}=\frac{\pi}{2}-\frac{d\omega_1}{2}$ であるから，$\beta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{d\omega_1}{2}\right)\fallingdotseq\frac{d\omega_1}{2}$ を得る．z と P との角 $\widehat{z\mathrm{P}}=\frac{d\omega_1}{2}\operatorname{cosec}\frac{\omega}{2}$ は微小角であるから，$d\omega_1$ の一乗まででは $\gamma=1$ である．このようにして rs_1 が $\left(\omega;\ \cot\frac{\omega}{2}\frac{d\omega_1}{2},\ \frac{d\omega_1}{2},\ 1\right)$ であることが知れる．y 軸のまわりの無限小回転についても全く同様に考えて，前に得たと同じ結果が得られる．これは第 34 図について読者に考えて頂くことにしよう．



第 34 図

* ≒ は $d\omega_1$ の第一次の項まで等しいことを示す．

このようにして，空間 **S** における r, rs_1, rs_2, rs_3 の座標が知れたから，これから **u**, **v**, **w** の成分が直に求められる．そうすれば dV は，(14.6) により

$$dV = \begin{vmatrix} \omega\dfrac{d\omega_1}{2}\cot\dfrac{\omega}{2} & \omega\dfrac{d\omega_1}{2} & 0 \\ -\omega\dfrac{d\omega_2}{2} & \omega\dfrac{d\omega_2}{2}\cot\dfrac{\omega}{2} & 0 \\ 0 & 0 & d\omega_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\omega^2\left(\cot^2\frac{\omega}{2}+1\right)d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3,$$

即ち

$$dV = \frac{\omega^2}{4\sin^2\dfrac{\omega}{2}}dV_0 \qquad (14.7)$$

と求められる．従って r と e の二点における‘群元の密度’の比 ρ/ρ_0 は $4\sin^2\dfrac{\omega}{2}\Big/\omega^2$ である．このことから，r における体積として dV の代りに

$$d\Omega_r = \frac{\sin^2\dfrac{\omega}{2}}{\omega^2}dV\left(=\frac{1}{4}dV_0\right) \qquad (14.8)$$

をとれば，パラメタ空間の‘点’r が s によって‘点’sr に移ったとき，$d\Omega_r$ が不変である：$d\Omega_{sr} = d\Omega_r\ (= d\Omega_e)$ なることが知れる．

空間 **S** の点 r を極座標 ω, θ, φ で示すことにすれば，極座標における体積要素は $dV = \omega^2 d\omega\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ であるから，

$$d\Omega_r = \sin^2\frac{\omega}{2}\sin\theta\, d\omega\, d\theta\, d\varphi \qquad (14.9)$$

となる．$\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ は立体角の要素 $d\Theta$ であるから，これはまた

$$d\Omega_r = \sin^2\frac{\omega}{2}d\omega\, d\Theta \qquad (14.10)$$

とも書かれる．

S の‘全体積’Ω は，(14.9) を φ につき 0 から 2π, θ につき 0 から π,

ω につき 0 から π まで積分する, 或いは (14.10) において $d\Theta$ を全立体角 4π につき, ω につき 0 から π まで積分することによって得られる:

$$\Omega = 4\pi\int_0^\pi \sin^2\frac{\omega}{2}d\omega = 2\pi^2. \tag{14.11}$$

なお $\mathbf{R}$ の元の函数で, 回転軸方向に無関係なもの $f(\omega)$ の積分は, (14.10) により

$$\int_{\mathbf{S}} f(\omega)d\Omega_r = 4\pi\int_0^\pi f(\omega)\sin^2\frac{\omega}{2}\,d\omega \tag{14.12}$$

となる. 前に証明したように, $s\in\mathbf{R}$ とすれば $s\mathbf{R}=\mathbf{R}$ であって, かつ $d\Omega_{sr} = d\Omega_r$ であるから, $\mathbf{S}$ の全体についての積分に対して,

$$\int f(sr)d\Omega_r = \int f(sr)d\Omega_{sr} = \int f(r)d\Omega_r \tag{14.13}$$

の関係が成立つ, ただし単に積分記号を記したものは $\mathbf{S}$ 全体についての積分を意味する. 'これが指標の議論に必要な積分定理である.' これは有限群のときの

$$\sum_r f(sr) = \sum_r f(r)$$

に相当するもので, その場合は, 両辺はいずれも群元 $s\mathbf{G}=\mathbf{G}$ 全体についての $f(r)$ の和で, ただ加え算の順序が異なるだけのことであるから, 至極明瞭であるが, 連続群にもって来ると, これだけの解析的考察を必要とする.

不変体積は, 同一群の総べてのパラメタ空間に共通したものであるから, これを四次元空間の三次元球面 $\mathbf{K}$ について求めてもよい. その場合 $U\in\mathbf{SU}_2$ による代表点の変換は, この球面 $\mathbf{K}$ を不変にする '回転' であるから [(11.35) 参照], この変換により体積は不変に保たれる. というのは, 回転に対しては, スカラー積 $\mathbf{xy}$ が不変だから, 任意の微小六面体が合同に移動するからである. 従って, $\mathbf{K}$ は前に $\mathbf{P}_0$ と記した, ユークリッド体積がそのまま不変体積になっている, 標準パラメタ空間である.

$\mathbf{K}$ の点を (11.17), (11.18) により, 三つのパラメタ θ_1, θ_2, θ_3 で表わせば,

その線素は

$$ds^2 = d\kappa^2 + d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2$$
$$= d\theta_1{}^2 + \sin^2\theta_1\, d\theta_2{}^2 + \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2\, d\theta_3$$

であることが容易に計算される．従って不変体積要素（‘球面’ **K** の‘面積要素’）は

$$d\Sigma = \sin^2\theta_1 \sin\theta_2\, d\theta_1\, d\theta_2\, d\theta_3$$

である．これと回転 $r(\omega\,;\,\alpha,\beta,\gamma)$ との関係は $\theta_1 = \omega/2$. (11.18) により，θ_2, θ_3 は方向 α, β, γ を示す極角 θ, φ に等しいから，

$$d\Sigma = \frac{1}{2}\sin^2\frac{\omega}{2}\sin\theta\, d\omega\, d\theta\, d\varphi$$
$$= \frac{1}{2}\sin^2\frac{\omega}{2}\, d\omega\, d\Theta = \frac{1}{2}\, d\Omega_r \tag{14.14}$$

を得る*.

ところで，いま問題にしているようなパラメタ空間の体積については，‘標準原器’があるわけではないから，その値は，異なる場所における相対値だけしか定まらない．したがって，リットルを升に変えるような体積の‘枡目’を変える因数 1/2 が上の式に付いたのは別に怪しむに足りない．

K を表わすパラメタとして，ξ, η, ζ (11.23) を用いた場合には，

$$ds^2 = d\kappa^2 + d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2 = |da|^2 + |db|^2$$
$$= d\zeta^2 + \cos^2\zeta\cdot d\xi^2 + \sin^2\zeta\cdot d\eta^2$$

であるから，

$$d\Omega = \sin\zeta\cos\zeta\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

或いは $2\zeta = \theta$ を用いれば，

$$d\Omega = \frac{1}{2}\sin\theta\, d\theta\, d\xi\, d\eta \tag{14.15}$$

---

* ここでもう一度地図の例を思い起してみると，地図の上の見掛けの面積が地球上の真の面積を表わさないこととと，**S** の‘見掛けの体積’dV が‘真の体積’$d\Omega$ とちがっていることとの類似性がはっきりしよう．

となる. **K** の全体積は, 四次元球面の表面積の 2 倍*

$$\Omega=4\pi^2 \tag{14.16}$$

で, **S** の全体積の 2 倍となるのは当然である.

準備のために思わぬ紙数を費してしまったが, (14.13) が得られたついでに, 有限パラメタの閉じた連続群に関する重要な定理を証明しておこう. (ただし '閉じた群' とは, ここで定義したような意味で, そのパラメタ空間の全体積が有限なものをいう.) それは '閉じた連続群の任意の表現 **D** はユニタリ表現に同値である' ことである.

証明. 表現空間 $\mathbf{V}_n$ におけるベクトル $\mathbf{x}$ $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ が, **D** における回転 r に対応する変換 $\mathrm{A}(r)$ により, $\mathbf{x}'=\mathbf{x}(r)\,(x_1(r),\ x_2(r),\ \cdots,\ x_n(r))$ になるとして, 積分

$$H=\int\sum_i \bar{x}_i(r)x_i(r)d\Omega_r \tag{14.17}$$

を考えれば, これは '変換 $\mathbf{x}\to\mathbf{x}(s)$ に対し不変である'. 何となれば, 上記の変換により $\mathbf{x}(r)\to\mathbf{x}(sr)$) であるから, H は

$$\int\sum_i x_i(sr)x_i(sr)d\Omega_r$$

となるが, (14.13) の積分定理によりその値は H に等しいからである. 変換 A の具体的な形 $x_i(r)=\sum\limits_p a_{ip}(r)x_p$ を (14.17) に代入すれば,

$$H=\sum_{p,\,q} h_{pq}\bar{x}_p x_q, \qquad h_{pq}=\int\sum_i \bar{a}_{ip}(r)a_{iq}(r)d\Omega_r=\overline{h_{qp}}$$

となり, H がベクトル成分 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ のエルミート形式であることがわかる. 最初の定義 (14.17) により任意のベクトル $\mathbf{x}$ に対し H の値は必ず正である (勿論 $\mathbf{x}$ は 0 ベクトルでないとして). h_{pq} を成分とするエルミート行列は, 基底の間のユニタリ変換により, 実数 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots\ \lambda_n$ を対角成分とする対角形に変形される. そのような基底 $\mathbf{u}_1,\ \cdots,\ \mathbf{u}_n$ に対しては, (14.17) は

* (14.16) を $0\leqq\theta\leqq\pi,\ 0\leqq\xi,\ \eta\leqq 2\pi$ の範囲で積分して, 容易に確められる.

$$H=\sum_p \lambda_p\bar{\xi}_p\xi_p$$

となり，H は ξ_p の如何にかかわらずその値が正であるから，λ_1, λ_2, $\cdots\cdot$, λ_n はいずれも正数である．よって，基底 $\mathbf{u}_i$ を各 $\sqrt{\lambda_i}$ 倍する，即ち $\xi_p\to\eta_p=\xi_p/\sqrt{\lambda_p}$ ($p=1,\ 2,\ \cdots\cdot,\ n$) の一次変換により，$H$ は

$$\sum_p \bar{\eta}_p\eta_p=\sum_p |\eta_p|^2$$

となる．この新しい基底に対しては，群元 s に対応する一次変換 $\mathrm{A}(s)$ が $H=|\eta_1|^2+|\eta_2|^2+\cdots\cdot+|\eta_n|^2$ を不変にするから，**D** はユニタリ表現になる (証明了)．

回転群の各既約表現 $\mathbf{D}_j$ がユニタリ表現に同値なることは前に知っていることであるが，ここでは一般に任意の（可約な）表現 **D** がまたユニタリ表現に変形し得ることがわかった．このことから **D** の完全可約性が再び別の方法で確められたことになる．

ユニタリ表現においては，$A(r^{-1})=A^{-1}(r)=\bar{A}^*(r)$ であるから，指標につき，

$$\chi(r^{-1})=\bar{\chi}(r) \tag{14.18}$$

の関係が成立つ．然るに上記の定理によれば，任意の表現はユニタリ表現に同値で，且つ同値な表現の指標は等しいから，‘(14.18) は一般の表現について成立つ.’

§15. 単純指標の直交性

本題に入るに先立って，§9 に述べた Schur の補題の一般の陳述を与えて置くことにしよう．これは一般に次のように述べられる．

P を n 行 m 列のきまった行列，$A(r)$, $B(r)$ を群 **G** の二つの，それぞれ m, n 次元の既約表現 **D**, **D′** の表現行列とする．‘**G** の総べての元 r に対して，

$$PA(r)=B(r)P \tag{15.1}$$

なる関係が成立つものとすれば,

（1） $m \neq n$ のときには $P=0$,

（2） $m=n$ のときには $P=0$ か, または $\det(P) \neq 0$ で **D** と **D′** とが同値である.'

証明. P の k 番目の列 $(p_{1k}, p_{2k}, \cdots, p_{nk})$ を一つのベクトル $\mathbf{p}^{(k)}$ の成分とすれば, (15.1):

$$\sum_j b_{ij}p_{jk} = \sum_j a_{jk}p_{ij} \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

は, 変換 B によって $\mathbf{p}^{(k)}$ から生ずるベクトル $B\mathbf{p}^{(k)}$ が, $\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)}, \cdots, \mathbf{p}^{(m)}$ の一次結合であることを示す:

$$B\mathbf{p}^{(k)} = \sum_j a_{jk}\mathbf{p}^{(j)}.$$

従って空間 $\mathbf{V}(\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)}, \cdots, \mathbf{p}^{(m)})$ は変換 B(r) に対して不変である. 然るに **D′** は既約であるから, **V** は **D′** の表現空間 **V′** と一致するか, または総べての $\mathbf{p}^{(k)}$ が 0 でなければならない. 前の場合は $m \geqq n$ で, $\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)}, \cdots, \mathbf{p}^{(m)}$ の中には n 個の一次的独立なベクトルが含まれている.

次に (15.1) の転置行列:

$$P^*B^*(r) = A^*(r)P^*$$

を作れば, これは (15.1) において P, A, B の代りに P^*, B^*, A^* と置いたものである. かつ **D**: $A(r)$ が既約ならば, 行列 $A^*(r)$ の集合も既約である. 従って前と同じ論法で, $n \geqq m$ か, $P=0$ かどちらかであることがわかる. この両方の結果を纏めれば, (1) $P=0$ か, (2) $m=n$ で $\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)}, \cdots, \mathbf{p}^{(m)}$ が一次的独立, 従って $\det(P) \neq 0$ かどちらかであることが結論される.

これから §9 に記した補題を得るには次のようにすればよい. 行列 S が既約表現 **D** の総べての行列と可換であるとすれば, 単位行列 E はあらゆる行列と可換であるから, $P=S-\sigma E$ も同様 **D** の総べての行列と可換である. 従って $\det(P) \neq 0$ か, 或いは $P=0$ のどちらかである. そこで σ を $\det(P)$

$= \det(S-\sigma E)=0$ の根，即ち S の固有値にとれば $P=0$，従って $S=\sigma E$ である．

この補題からまず表現行列の成分の直交関係を導くことにしよう．

D: $A(r)$，**D**$'$: $B(r)$ を同一の閉じた連続群 **G** の m, n 次元の既約表現，X を n 行 m 列の任意の行列とし，

$$P=\int B(r)XA^{-1}(r)d\Omega_r \tag{15.2}$$

を作る．そうすれば，表現条件：$B(s)B(r)=B(sr)$ から，

$$\begin{aligned}B(s)P&=\int B(s)B(r)XA^{-1}(r)d\Omega_r\\&=\int B(sr)XA^{-1}(r)d\Omega_r\\&=\int B(t)\,XA^{-1}(s^{-1}t)d\Omega_t\end{aligned}$$

である．ところで

$$A(s^{-1}t)=A(s^{-1})A(t)=A^{-1}(s)A(t),$$

従って

$$A^{-1}(s^{-1}t)=A^{-1}(t)A(s)$$

であるから，上式は

$$\int B(t)XA^{-1}(t)d\Omega_tA(s)=PA(s)$$

となり，P は，**G** に属するあらゆる元 s につき，

$$B(s)P=PA(s) \tag{15.3}$$

を満足する．従って Schur の補題から，**D** と **D**$'$ とが同値でないときには $P=0$，即ち

$$\sum_{k,\ h}\int b_{jk}(r)x_{kh}a_{hi}(r^{-1})d\Omega_r=0$$

を得る．ここに x_{kh} は全く任意であるから，次の関係を得る：

$$\int a_{hi}(r^{-1})b_{jk}(r)d\Omega_r = 0. \tag{15.4}$$

D と **D**′ とが同値であって，$B(r)=A(r)$ のときには，Schur の補題により P は単位行列の定数倍である．即ち任意の x_{kh} に対し，

$$\sum_{k,h}\int a_{jk}(r)x_{kh}a_{hi}(r^{-1})d\Omega_r = c\delta_{ji}$$

が成立つ．よって

$$\int a_{hi}(r^{-1})a_{jk}(r)d\Omega_r = c\delta_{ij}$$

を得る．定数 c を決定するために，$i=j$ として $i=1, 2, \cdots, m$ につき加えれば，左辺は

$$\sum_i \int a_{hi}(r^{-1})a_{ik}(r)d\Omega_r = a_{hk}(e)\int d\Omega_r = \delta_{hk}\int d\Omega_r,$$

右辺は fc となる（f は表現 **D** の次元数）．よって $c=\delta_{hk}\Omega/f$ なることがわかる．

以上の結果をまとめて，次の定理として述べることができる：

‘同値でない二つの既約表現 **D**, **D**′ の行列成分に対しては

$$\int a_{hi}(r^{-1})b_{jk}(r)d\Omega_r = 0, \tag{15.5}$$

また一つの既約表現 **D** の行列成分の間には

$$\int a_{hi}(r^{-1})a_{jk}(r)d\Omega_r = \frac{\Omega}{f}\delta_{ij}\delta_{hk} \tag{15.6}$$

の関係が存在する.’ ただし $\Omega=\int d\Omega_r$, f は表現 **D** の次元数である．

特に **D**, **D**′ が ‘ユニタリ表現’ であるときには $A(r^{-1})=\overline{A^*(r)}$ であるから，これらの関係は

$$\int \bar{a}_{ih}(r)b_{jk}(r)d\Omega_r = 0, \tag{15.7}$$

$$\int \bar{a}_{ih}(r)a_{jk}(r)d\Omega_r = \frac{\Omega}{f}\delta_{ij}\delta_{hk} \tag{15.8}$$

と記すことができる．これを‘表現行列成分の直交関係’と称する．

以上の一般定理を回転群の表現に適用しようとすると，その表現の或るものは二価であるため特別の考察がいりようになる．複素函数論で，二価函数の積分を行うときには，Riemann 面上の一価函数にして積分するのと同じように，二価表現を積分する際には，回転群のパラメタ空間として $(\mathbf{S}, \mathbf{S}_1)$ の二重空間において積分を行う．これは三次元球面 $\mathbf{K}$ 全体について積分するといっても同じことである．一価表現についてはこれは同じ積分の二回の繰返しとなり，無駄な感じもするが，記述を統一的にするには便利である．よって以下体積要素に $d\Omega_r = \sin^2\omega/2\, d\omega\, d\theta\, d\varphi$ を用いたときには，積分の範囲は $0 \leqq \omega \leqq 2\pi$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$, $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ において行うことにする．そして r と書いた群元は，回転群の元としては，$\mathbf{S}$ に属するものと，$\mathbf{S}_1$ に属するものとを区別して用いている．(或いは，回転群の表現を群 $\mathbf{SU}_2$ の表現と考えて r を $\mathbf{SU}_2$ の元と思ってもよいことは勿論である．)

そこで直交性の定理 (15.7)，(15.8) を回転群の表現に応用すれば次のようになる．

$$\int_{\mathbf{K}} \overline{D}^j_{mm'}(r) D^k_{\mu\mu'}(r) d\Omega_r = \delta_{jk}\delta_{m\mu}\delta_{m'\mu'}\frac{\Omega}{2j+1}. \quad (\Omega = 4\pi^2) \tag{15.9}$$

(12.47) において，(11.28) の置き換え

$$(\varphi + \psi)/2 = \xi, \qquad (\varphi - \psi)/2 = \eta$$

を行えば，$d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\xi\, d\eta/2$ (14.15) で，

$$D^j_{mm'}(\theta, \xi, \eta) = e^{-i\beta\xi}e^{-i\alpha\eta}P^j_{mm'}(\cos\theta),$$

$$\alpha = m - m', \ \beta = m + m' \quad (\alpha, \beta \text{ は整数})$$

を得る．従って m, μ; m', μ' に対する直交性は指数函数 e^{imx} の直交性にほかならない．$m = \mu$, $m' = \mu'$ の場合には，(15.9) により

$$j \neq k \text{ ならば } \int_0^\pi P^j_{mm'}(\cos\theta) P^k_{mm'}(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta = 0$$

を得る．これから，(12.50) により，Jacobi の多項式の直交関係

$$\int_{-1}^{1}(1-z)^{\alpha}(1+z)^{\beta}P_l^{(\alpha,\beta)}(z)P_n^{(\alpha,\beta)}(z)dz=0 \qquad (l\neq n) \tag{15.10}$$

が導かれる．ただし $l=j-m$, $n=k-m$ である（l, n は整数）．$l=n$ に対しては（ξ, η に関する積分が $4\pi^2$ であることを顧慮して），(15.9) は

$$\int_{-1}^{1}(1-z)^{\alpha}(1+z)^{\beta}\{P_n^{(\alpha,\beta)}(z)\}^2dz=\frac{(n+\alpha)!(n+\beta)!}{(n+\alpha+\beta)!n!}\frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1} \tag{15.11}$$

なる，Jacobi の多項式の規準化積分を与える．

(15.7), (15.8) において $i=h, j=k$ としてこれらの添字につき加えれば，既約表現 **D**, **D**$'$ の指標 χ, χ' に関して，

$$\int\overline{\chi}(r)\chi'(r)d\Omega_r=0, \tag{15.12}$$

$$\int\overline{\chi}(r)\chi(r)d\Omega_r=\int|\chi(r)|^2d\Omega=\Omega \tag{15.13}$$

なる関係を得る．既約表現の指標を**単純指標**と呼び，(15.12), (15.13) を‘単純指標の直交性定理’と称する．回転群に対しては $\chi(r)$ は回転角 ω のみの実函数 $\chi(\omega)$ であるから，立体角について積分して，

$$\int_0^{2\pi}\chi_j(\omega)\chi_{j'}(\omega)\sin^2\frac{\omega}{2}d\omega=0 \quad (j\neq j'), \tag{15.14}$$

$$\int_0^{2\pi}[\chi_j(\omega)]^2\sin^2\frac{\omega}{2}d\omega=\pi \tag{15.15}$$

となる．$\chi_j(\omega)$ の式を代入すれば

$$\int_0^{2\pi}\sin(2j+1)\frac{\omega}{2}\sin(2j'+1)\frac{\omega}{2}d\omega=\pi\delta_{jj'} \tag{15.16}$$

なる三角函数に対する直交関係が得られる．ここに $2j+1$ は 1, 2, $\cdots$, n, $\cdots$ なる自然数であるから，$\omega/2=x$ とすれば，これは

$$\int_0^{\pi}\sin mx\ \sin nx\,dx=\frac{\pi}{2}\delta_{mn} \tag{15.17}$$

なる区間 $[0,\pi]$ における正弦函数の直交性で，Fourier 級数でおなじみのもの

である. j が 0, 1, 2, $\cdots\cdots$ のときには，表現は一価になり ω についての積分は π まででよい. そうすれば (15.16) の右辺も半分になる. これは $[0, \pi/2]$ における奇数倍角の正弦函数の直交性を示している:

$$\int_0^{\pi/2} \sin\frac{2m+1}{2}x \sin\frac{2n+1}{2}x\, dx = \frac{\pi}{4}\delta_{mn}$$

$$(m,\ n = 1,\ 2,\ \cdots\cdots).$$

Fourier 級数論によれば，$0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で定義された連続函数 $f(x)$ は，級数:

$$c_0 \sin x + c_2 \sin 2x + \cdots\cdots + c_n \sin nx + \cdots\cdots,$$

$$c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin nx\, dx \tag{15.18}$$

により，平均において，いくらでも精密に近似できる. 特に

$$\int_0^{\pi} [f(x)]^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n{}^2 \tag{15.19}$$

なる Parseval の方程式，或いは**完備性定理**が成立つことはよく知られている. ここで $x = \omega/2$ と置けば,

$$\sin nx = \sin\frac{n\omega}{2} = \sin\left(\frac{2j+1}{2}\omega\right)$$

$$(n = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\quad j = 0,\ 1/2,\ 1,\ \cdots\cdots)$$

となるから，回転群 **R** の単純指標 $\chi_j(\omega)$ の全系が ($0 \leqq \omega \leqq 2\pi$ の区間で) 完備系を作っていることがわかる. このように或る連続群の単純指標の全系が，パラメタ空間における類函数に対して完備系を作っている. もっと一般に，'有限パラメタの閉じた連続群の既約表現行列の全系が，パラメタ空間の任意の連続函数に対して完備系を作っている' ことの証明ができるのであるが，我々の場合には Fourier 級数論および Jacobi の多項式の理論により，この定理は確められているから*，これ以上一般論に深入することは止めておこう.

* Jacobi の多項式の完備性は，Legendre の多項式の場合と同様，Weierstrass の近似多項式定理によりすぐに証明される.

一般論はこれくらいにして，単純指標の直交性の簡単な応用について記そう．可約な表現 **D** の指標を $\chi(r)$，その既約成分 $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2$, $\cdots\cdot$ の単純指標を $\chi_1(r)$, $\chi_2(r)$, $\cdots\cdot$; $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2$, $\cdots\cdot$ が **D** に含まれる回数を m_1, m_2, $\cdots\cdot$ とすれば，**D** の表現行列は，適当な基底をとれば，第 29 図のような形になるから，その対角和を作ることにより，

$$\chi(r) = m_1\chi_1(r) + m_2\chi_2(r) + \cdots\cdot \tag{15.20}$$

であることがわかる．この両辺に $\bar{\chi}_\alpha(r)$ を掛けて，パラメタ空間において r につき積分すれば，(15.12)，(15.13) により，

$$\int \bar{\chi}_\alpha(r)\chi(r)d\Omega_r = m_\alpha\Omega \tag{15.21}$$

を得る．この式により，既約表現 $\mathbf{D}_\alpha$ が任意の表現 **D** に含まれる回数 m_α を求めることができる．かつ

$$\int \bar{\chi}_\alpha(r)\chi(r)d\Omega_r = \Omega$$

であれば，**D** は $\mathbf{D}_\alpha$ を一回だけ含む，即ち **D** と $\mathbf{D}_\alpha$ とが一致するから，(15.13) が‘表現 **D** が既約であるための必要かつ十分なる条件である’ことがわかる．例えば回転群の既約表現 $\mathbf{D}_j$ の指標がこの条件を満足することは

$$4\pi\int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{2j+1}{2}\omega\right)d\omega = \Omega$$

から直接確められる．

展開 (15.20) から，積表現 $\mathbf{D}_j \times \mathbf{D}_{j'}$ の簡約の問題も簡単に解決される．積表現の基底の変換行列の成分は (8.9) : $c_{ij,hk} = a_{ih}b_{jk}$ であるから，その指標は

$$\sum_{i,j} c_{ij,ij} = \sum_{i,j} a_{ii}b_{jj} = \sum_i a_{ii}\sum_j b_{jj}$$

で与えられる．従って $\mathbf{D} = \mathbf{D}' \times \mathbf{D}''$ の指標を $\chi(r)$, $\mathbf{D}'$, $\mathbf{D}''$ の指標をそれぞれ $\chi'(r)$, $\chi''(r)$ とすれば，

$$\chi(r) = \chi'(r)\chi''(r) \tag{15.22}$$

即ち'積表現の指標は各因子表現の指標の積である.'

これを回転群の既約表現の積 $\mathbf{D}_j \times \mathbf{D}_{j'}$ について適用し,

$$\chi(r) = \chi_j(r)\chi_{j'}(r)$$

の右辺に (14.3) を代入すれば,

$$\chi(\omega) = \frac{\epsilon^{2j+1} - \epsilon^{-2j-1}}{\epsilon - \epsilon^{-1}}(\epsilon^{2j'} + \epsilon^{2j'-1} + \cdots\cdots + \epsilon^{-2j'})$$

を得る. $j \geqq j'$ として, ϵ^{2j+1} を括弧の中に第一項から順に掛け, ϵ^{-2j-1} を最後の項から逆順に掛けて, これらを一つ置きに並べれば,

$$\begin{aligned}\chi(\omega) &= \frac{1}{\epsilon - \epsilon^{-1}}(\epsilon^{2(j+j')+1} - \epsilon^{-2(j+j')-1} + \epsilon^{2(j+j'-1)+1} - \epsilon^{-2(j+j'-1)-1} \\ &\quad + \cdots\cdots + \epsilon^{2(j-j')+1} - \epsilon^{-2(j-j')-1}) \\ &= \chi_{j+j'}(\omega) + \chi_{j+j'-1}(\omega) + \cdots\cdots + \chi_{j-j'}(\omega)\end{aligned}$$

となる. 従って

$$\mathbf{D}_j \times \mathbf{D}_{j'} = \mathbf{D}_{j+j'} + \mathbf{D}_{j+j'-1} + \cdots\cdots + \mathbf{D}_{|j-j'|} \tag{15.23}$$

なる (13.1) の結果が簡単に証明された.

既約表現の行列成分の直交関係 (15.7), (15.8) の応用として, §13 で積表現を簡約するユニタリ変換を求めた際に不定であった因数 A_J を決定することを試みよう. 記述の仕方を対称化するため, 記号を少々改める. j で標識される既約表現を $\mathbf{D}(j)$, そのユニタリ基底を $\psi(jm)$ とする (前の $\mathbf{D}_j$ および $\psi_m = \psi_m{}^j$). そうすると積表現の $\mathbf{D}(j_1) \times \mathbf{D}(j_2)$ の基底は $\psi(j_1m_1)\psi(j_2m_2)$ である. 我々の問題は, $\mathbf{D}(j_1) \times \mathbf{D}(j_2)$ (一般性を失うことなく $j_1 \geqq j_2$) を簡約して現われる既約表現 $\mathbf{D}(j)$ の基底を

$$\psi(jm) = \sum_{m_1m_2}\psi(j_1m_1)\psi(j_2m_2)(j_1m_1j_2m_2|j_1j_2jm) \tag{15.24}$$

のように表わす係数 $(j_1m_1j_2m_2|j_1j_2jm)$, 即ち $\psi(j_1m_1)\psi(j_2m_2) \to \psi(jm)$ の変換行列 S の成分を求めることである. 以下の考察では j_1, j_2 はきまったものとするから, これを略して $(m_1m_2|jm)$ と記そう. 変換がユニタリであることか

ら，次のユニタリ関係

$$\sum_{m_1 m_2} \overline{(m_1 m_2 | jm)}(m_1 m_2 | j'm') = \delta_{jj'}\delta_{mm'}, \tag{15.25}$$

$$\sum_{j,m} \overline{(m_1 m_2 | jm)}(m_1' m_2' | jm) = \delta(m_1 m_1')\delta(m_2 m_2') \tag{15.26}$$

が要求される．初めの積表現の基底を標識するのは $\alpha = (m_1, m_2)$ の組みで，その係数は $(2j_1+1)(2j_2+1)$，これを簡約した形にしたときの基底を表わす数は $\beta = (j, m)$ $(j = j_1 + j_2,\ j_1 + j_2 - 1, \cdots, j_1 - j_2;\ |m| \leqq j)$ の組みで，その総数は

$$\begin{aligned}\sum_j (2j+1) &= \sum_{\nu=0}^{2j_2} \{2(j_1 + j_2 - \nu) + 1\} \\ &= (2j_1+1)(2j_2+1) + 2\sum_{\nu=0}^{2j_2}(j_2 - \nu).\end{aligned}$$

この第二項は $2(j_2 + (j_2 - 1) + \cdots + (-j_2)) = 0$ であるから，当然のことながら，(j, m) の総数は (m_1, m_2) の総数と一致する．そして第一の基底に対しては，$\mathbf{D}(j)$ の表現行列を $D(j, m\mu; r)$ として，その表現行列は，

$$A_{\alpha\alpha'}(r) = A(m_1 m_2, \mu_1 \mu_2; r) = D(j_1, m_1 \mu_1; r) D(j_2, m_2 \mu_2; r).$$

$[\alpha' = (\mu_1, \mu_2)]$．第二の簡約された形では

$$B_{\beta\beta'}(r) = B(jm, j'm'; r) = \delta_{jj'} D(j, mm'; r)$$

となる $[\beta' = (j', m')]$．そして，

$$A = SBS^{-1} = SB\tilde{S} \qquad \left(A_{\alpha\alpha'} = \sum_{\beta,\beta'} S_{\alpha\beta} B_{\beta\beta'} \bar{S}_{\alpha'\beta'},\ \right)$$

即ち

$$\begin{aligned}&D(j_1, m_1\mu_1; r) D(j_2, m_2\mu_2; r) \\ &\quad = \sum_{j,m,m'} (m_1 m_2 | jm) \overline{(\mu_1 \mu_2 | jm')} D(j, mm'; r).\end{aligned} \tag{15.27}$$

然るに前に記したように，m_1, m_2, m の間には

$$m_1 + m_2 = m$$

の関係があるから，右辺の m, m' についての加え算を行うと，

$$\sum_j (m_1m_2|j,\ m_1+m_2)(\overline{\mu_1\mu_2|j,\ \mu_1+\mu_2})D(j,\ m_1+m_2,\ \mu_1+\mu_2\,;\,r)$$

だけが残る．よって

$$(m_1m_2|j, m_1+m_2) = (m_1m_2|j)$$

と更に略記すれば，

$$D(j_1, m_1\mu_1\,;\, r)D(j_2, m_2\mu_2\,;\, r)$$
$$= \sum_j (m_1m_2|j)(\overline{\mu_1\mu_2|j})D(j,\ m_1+m_2,\ \mu_1+\mu_2\,;r)$$

を得る．

この両辺に $\overline{D}(k, n\nu\,; r)$ を掛けて積分すれば，直交関係 (15.7), (15.8) により $k=j$, $n=m_1+m_2$, $\nu=\mu_1+\mu_2$ 以外のものは 0 となり，次の関係式を得る：

$$\int D(j_1, m_1\mu_1\,;r)D(j_2, m_2\mu_2\,;r)\overline{D}(j,\ m_1+m_2,\ \mu_1+\mu_2\,;\ r)d\Omega_r$$
$$= \frac{\Omega}{2j+1}(m_1m_2|j)(\overline{\mu_1\mu_2|j}). \tag{15.28}$$

我々の目的は A_j を求めることで，これは m には無関係であるから，(15.28) で特に $m_1=\mu_1=j_1$, $m_2=\mu_2=-j_2$ とおけば（j の最小値は j_1-j_2 であるからこうとることによって j の可能な総べての値がもれる恐れはない），

$$\int D(j_1j_1j_1\,;r)D(j_2,\ -j_2-j_2\,;r)\overline{D}(j,\ j_1-j_2,\ j_1-j_2\,;r)d\Omega_r$$
$$= \frac{\Omega}{2j+1}|(j_1-j_2|j)|^2. \tag{15.29}$$

然るに，(12.44) により

$$D(j,jj\,;r) = a^{2j}, \qquad D(j,\ -j-j\,;r) = \bar{a}^{2j}$$

$$D(j,\ j_1-j_2,\ j_1-j_2\,;\ r)$$
$$= \sum_\nu (-)^\nu \frac{(j+j_1-j_2)!\,(j-j_1+j_2)!}{(j+j_1-j_2-\nu)!\,(j-j_1+j_2-\nu)!\,\nu!\,\nu!} a^{j+j_1-j_2-\nu}\bar{a}^{j-j_1+j_2-\nu}b^\nu\bar{b}^\nu$$

であるから，

$$|(j_1-j_2|j)|^2 = \frac{2j+1}{\Omega}\sum_{\nu}(-)^{\nu}\frac{(j+j_1-j_2)!(j-j_1+j_2)!}{(j+j_1-j_2\quad\nu)!(j-j_1+j_2-\nu)!\nu!\nu!}$$

$$\cdot\int|a|^{2(j+j_1+j_2-\nu)}|b|^{2\nu}d\Omega. \qquad (15.30)$$

ところが，直交関係 (15.8) により

$$\int|D(j,jm\,;r)|^2 d\Omega_r = \frac{\Omega}{2j+1},$$

即ち，(12.45) により，

$$\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!}\int|a|^{2(j+m)}|b|^{2(j-m)}d\Omega_r = \frac{\Omega}{2j+1}$$

であるから，

$$j+m=\alpha, \qquad j-m=\beta \qquad (2j=\alpha+\beta)$$

とおけば

$$\frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\beta!}\int|a|^{2\alpha}|b|^{2\beta}d\Omega_r = \frac{\Omega}{\alpha+\beta+1}.$$

従って

$$\int|a|^{2(j+j_1+j_2-\nu)}|b|^{2\nu}d\Omega_r = \Omega\frac{(j+j_1+j_2-\nu)!\nu!}{(j+j_1+j_2+1)!}. \qquad (15.31)$$

よって次の関係を得る：

$$|(j_1-j_2|j)|^2 = \frac{2j+1}{(j+j_1+j_2+1)!}\sum_{\nu}(-)^{\nu}\frac{(j+j_1-j_2)!(j-j_1+j_2)!(j+j_1+j_2-\nu)!}{(j+j_1-j_2-\nu)!(j-j_1+j_2-\nu)!\nu!}.$$

$$(15.32)$$

あとはこの右辺の式をまとめればよい．そのため，まず二項係数に関する性質を用意する．一つは

$$(1+x)^m(1+x)^n = (1+x)^{m+n}$$

の両辺における x^p の係数を比較して得られる関係

$$\sum_{\nu}\binom{m}{\nu}\binom{n}{p-\nu} = \binom{m+n}{p}, \qquad (15.33)$$

もう一つは次の形式的な関係

$$\binom{u}{v} = \frac{u(u-1)\cdots\cdots(u-v+2)(u-v+1)}{v!}$$
$$= (-)^v \frac{(v-u-1)(v-u-2)\cdots\cdots(1-u)(-u)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdots\cdot v}$$
$$= (-)^v \binom{v-u-1}{v} \tag{15.34}$$

である．(15.32) の右辺は

$$\frac{(2j+1)(j+j_1-j_2)!(2j_2)!}{(j+j_1+j_2+1)!}\sum_\nu (-)^\nu \binom{j-j_1+j_2}{\nu}\binom{j+j_1+j_2-\nu}{j+j_1-j_2-\nu}$$

となる．この中 $\sum_\nu$ の部分は，(15.34), (15.33) により，

$$\sum_\nu (-)^{j+j_1-j_2}\binom{j-j_1+j_2}{\nu}\binom{-2j_2-1}{j+j_1-j_2-\nu}$$
$$= (-)^{j+j_1-j_2}\binom{j-j_1-j_2-1}{j+j_1-j_2}$$

と書かれるから，再び (15.34) により，これは

$$\binom{2j_1}{j+j_1-j_2} = \frac{(2j_1)!}{(j+j_1-j_2)!(j_1+j_2-j)!}$$

に等しい．よって

$$|(j_1-j_2|j)|^2 = \frac{(2j+1)(2j_1)!(2j_2)}{(j+j_1+j_2+1)!(j_1+j_2-j)!}$$

を得る．一方 (13.10), (13.11) によれば，

$$|(j_1-j_2|j)|^2 = |A_j|^2(2j_1)!(2j_2)!/(j+j_1-j_2)!(j-j_1+j_2)!(j_1+j_2-j)!^2.$$

これから

$$A_j = \sqrt{\frac{(2j+1)(j+j_1-j_2)!(j-j_1+j_2)!(j_1+j_2-j)!}{(j+j_1+j_2+1)!}} \tag{15.35}$$

が，絶対値 1 の因数を除いて定まる．このようにして，Clebsch-Gordan 係数の表式

$$(j_1m_1j_2m_2|j_1j_2jm) = \delta(m_1+m_2,\ m)\sqrt{\frac{(2j+1)(j_1+j_2-j)!(j+j_1-j_2)!(j+j_2-j_1)!}{(j_1+j_2+j+1)!}}.$$

$$\cdot\sum_{\nu}(-)^{\nu}\frac{\sqrt{(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!(j+m)!(j-m)!}}{\nu!(j_1+j_2-j-\nu)!(j_1-m_1-\nu)!(j_2+m_2-\nu)!(j-j_2+m_1-\nu)!(j-j_1-m_2+\nu)!} \tag{15.36}$$

が求められた．このようにして作った行列Sの成分は総べて実数である．その間には直交関係（(15.25), (15.26) で，共軛複素数を示す上の棒を除いたもの）が成立つ．したがって (15.24) を逆に解いたものは

$$\psi(j_1m_1)\psi(j_2m_2)=\sum_{j=j_1+j_2}^{|j_1-j_2|}(j_1m_1j_2m_2|j_1j_2jm)\psi(jm) \tag{15.37}$$

である．

Clebsch-Gordan 係数は，自変数の交換に対して次の対称性を持つことが示される．

$$\begin{aligned}(j_1m_1j_2m_2|j_1j_2j_3m_3) &= (-)^{j_1+j_2-j_3}(j_2m_2j_1m_1|j_2j_1j_3m_3)\\ &= (-)^{j_1+j_2-j_3}(j_1\,-m_1j_2\,-m_2|j_1j_2j_3\,-m_3)\\ &= (j_2\,-m_2j_1\,-m_1|j_1j_2j_3\,-m_3)\\ &= (-)^{j_1-m_1}\sqrt{\frac{2j_3+1}{2j_2+1}}(j_1m_1j_3\,-m_3|j_1j_3j_2\,-m_2)\\ &= (-)^{j_2+m_2}\sqrt{\frac{2j_3+1}{2j_1+1}}(j_3\,-m_3j_2m_2|j_3j_2j_1\,-m_1)\\ &= (-)^{j_1-m_1}\sqrt{\frac{2j_3+1}{2j_2+1}}(j_3m_3j_1\,-m_1|j_3j_1j_2m_2).\end{aligned} \tag{15.38}$$

Clebsch-Gordan 係数 $(j_1j_2|jm)$ の表は Condon-Shortley の書物に任意の j_1 に対し，$j_2=\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2$，山田・森田の論文 (On the β-Ray Angular Correlations. Prog. Theo. Phys. **4** (1952) 444) に $j_2=3$ に対するものが与えられている．

§16. 3個の既約表現の積の簡約

回転群の二つの既約表現の積 $\mathsf{D}(j_1)\times\mathsf{D}(j_2)$ を簡約したときには $j_1+j_2\geqq$

$J \geqq |j_1 - j_2|$ を満足する既約表現 $\mathbf{D}(J)$ が，各一回ずつ現われ，はじめの基底 $\psi(j_1m_1)\psi(j_2m_2)$ を簡約に応じた基底 $\psi(JM) = \psi(j_1j_2JM)$ に変換する係数が Clebsch-Gordan 係数 (15.36) で与えられることを知った.

次に三つの既約表現の積を簡約することを考えよう．この場合には，例えば

$$\mathbf{D}(1) \times \mathbf{D}(1) \times \mathbf{D}(2) = [\mathbf{D}(2) + \mathbf{D}(1) + \mathbf{D}(0)] \times \mathbf{D}(2)$$
$$= \mathbf{D}(4) + 2\mathbf{D}(3) + 3\mathbf{D}(2) + 2\mathbf{D}(1) + \mathbf{D}(0)$$

というようになって，

$$\mathbf{D}(j_1) \times \mathbf{D}(j_2) \times \mathbf{D}(j_3) = \sum k_J \mathbf{D}(J) \tag{16.1}$$

の k_J は1より大きいものが現われる．このような $\mathbf{D}(J)$ に対しては，その基底 $\psi(\alpha, J, M)(\alpha = 1, 2, \cdots, k_J)$ は一義的に定まらない.

これを具体的にきめるには，(16.1) で積を作る順序を指定することが必要である．例えば

$$\mathbf{D}(j_1) \times \mathbf{D}(j_2) = \sum \mathbf{D}(J_{12}) \quad (j_1 + j_2 \geqq J_{12} \geqq |j_1 - j_2|) \tag{16.2}$$

により，まず最初の二つの表現の積を簡約する基底

$$\psi(j_1j_2J_{12}M_{12}) \tag{16.3}$$

を作り，次に

$$\mathbf{D}(J_{12}) \times \mathbf{D}(j_3) = \sum \mathbf{D}(J) \quad (J_{12} + j_3 \geqq J \geqq |J_{12} - j_3|) \tag{16.4}$$

の簡約を行って

$$\psi(j_1j_2(J_{12})j_3\,;\, JM) \tag{16.5}$$

なる基底を作れば，$\mathbf{D}_J$ に対するきまった一つの基底が得られる．(16.2) を満足する J_{12} の異なるものについてこれらを k_J 個作れば，$\mathbf{D}_J$ に対する基底の一組みが揃う.

積の合成の順をかえて，最初

$$\mathbf{D}(j_2) \times \mathbf{D}(j_3) = \sum \mathbf{D}(J_{23}) \quad (j_2 + j_3 \geqq J_{23} \geqq |j_2 - j_3|)$$

を作り，次に

$$\mathbf{D}(j_1)\times\mathbf{D}(J_{23})=\sum\mathbf{D}(J)\quad(j_1+J_{23}\geqq J\geqq|j_1-J_{23}|)$$

なる簡約を行えば，$\mathbf{D}_J$ に対して，

$$\psi(j_1,\ j_2j_3(J_{23})\ ;\ JM)\tag{16.6}$$

なる，(16.5) とは異なった k_J 個の基底が得られる*. このような異なる二組の基底の間の変換行列 S を求めてみよう. 第一の組では，k_J 個の基底を区別する数 α は J_{12} であり，第二の組では $\beta=J_{23}$ である. (16.5) と (16.6) との変換は

$$\psi(\alpha JM)=\sum_{\beta,J',M'}\psi(\beta J'M')S(\beta J'M'\ ;\ \alpha JM)\tag{16.7}$$

と書かれる. そしてこの二組みの異なる基底を用いたときの表現行列 U, V の間には

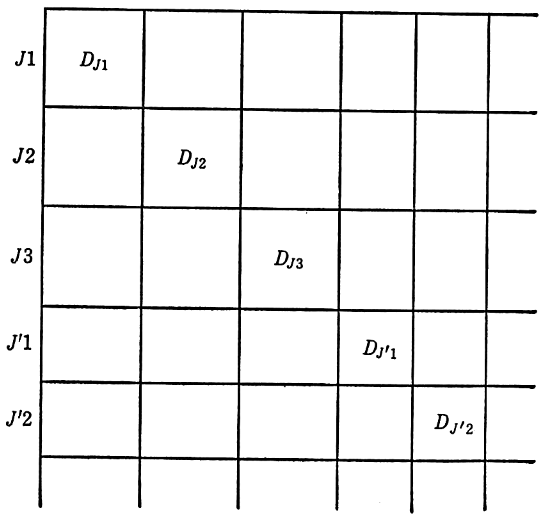
$$V=S^{-1}US,\ \text{即ち}\quad SV=US\tag{16.8}$$

の関係が成立つ.

ここに U, V は，どちらも第35図のような形をしている. (文字の書いてない部分は全部 0)

$D_{J\alpha}$ ($\alpha=1, 2, \cdots, k_J$) はいずれも，$\mathbf{D}(J)$ に対する，同値な表現行列である.

この U, V の行，列の区分に応じて，行列 S も，部分行列 $S_{J\alpha,J'\beta}$ に分けることにする. そう



($k_J=3$の場合)

第 35 図

---

* これら各の k_J 個の基底は互に直交している.

すれば，(16.8) の関係は

$$S_{J\alpha,J'\beta}D_{J'\beta}=D_{J\alpha}S_{J\alpha,J'\beta}$$

とかかれる．ところが $D_{J\alpha}$ は回転群の既約表現行列のであるから，Schur の補題により，

$J'\neq J$ ならば

$$S_{J\alpha,J'\beta}=0,$$

$J'=J$ ならば

$$S_{J\alpha,J'\beta}=\sigma_{\alpha\beta}E.$$

ただし E は $\mathbf{D}(J)$ の次元数に等しい $2J+1$ 次元の単位行列である．

J1	$S_{J1,J1}$	$S_{J1,J2}$	$S_{J1,J3}$	$S_{J1,J'1}$	$S_{J1,J'2}$	
J2	$S_{J2,J1}$	$S_{J2,J2}$	$S_{J2,J3}$	$S_{J2,J'1}$	$S_{J2,J'2}$	
J3	$S_{J3,J1}$	$S_{J3,J2}$				

第 36 図

このことから，(16.8) の変換係数 $S(\beta J'M';\alpha JM)$ は $J'=J$ 以外のときは 0 で，かつ‘M に無関係である’ことがわかる．この係数 $S(\beta J;\alpha J)$ を

$$\begin{aligned}&< j_1j_2(J_{12})j_3\,;\,J\,|\,j_1,\;j_2j_3(J_{23})\,;\,J>\\&=\sqrt{(2J_{12}+1)(2J_{23}+1)}\,W(j_1j_2Jj_3\,;\,J_{12}J_{23})\end{aligned}\tag{16.9}$$

と書いて，W のことを **Racah 係数**と呼ぶ．

Racah 係数は (16.5) と (16.6) との間の変換係数であるから，Clebsch-Gordan 係数によって表わすことができる．即ち (15.24) を二回用いて，

$$\begin{aligned}\psi(j_1j_2(J_{12})j_3\,;\,JM)=&\sum\psi(j_1m_1)\psi(j_2m_2)\psi(j_3m_3)\\&\cdot(j_1m_1j_2m_2|J_{12}M)(J_{12}M_{12}j_3m_3|JM),\end{aligned}\tag{16.10}$$

$$\begin{aligned}\psi(j_1,\,j_2j_3(J_{23})\,;\,JM)=&\sum\psi(j_1m_1)\psi(j_2m_2)\psi(j_3m_3)\\&\cdot(j_1m_1J_{23}M_{23}|JM)(j_2m_2j_3m_3|J_{23}M_{23}).\end{aligned}\tag{16.11}$$

これらの変換は直交変換であるから，第二の関係を逆に解くことは簡単である：

$$\psi(j_1m_1)\psi(j_2m_2)\psi(j_3m_3) = \sum \psi(j_1, j_2j_3(J_{23})\,;JM)$$
$$\cdot\,(j_1m_1J_{23}M_{23}|JM)(j_2m_2j_3m_3|J_{23}M_{23}).$$

これを (16.10) に代入すれば,

$$\sqrt{(2J_{12}+1)(2J_{23}+1)}W(j_1j_2Jj_3\,;J_{12}J_{23})$$
$$= \sum (j_1m_1j_2m_2|j_1j_2J_{12}M_{12})(J_{12}M_{12}j_3m_3|J_{12}j_3JM)$$
$$\cdot\,(j_1m_1J_{23}M_{23}|j_1J_{23}JM)(j_2m_2j_3m_3|j_2j_3J_{23}M_{23}) \qquad (16.12)$$

が得られる．ただし加え算は

$$M = m_1 + m_2 + m_3, \qquad -J_{12} \leqq M_{12} = m_1 + m_2 \leqq J_{12},$$
$$-J_{23} \leqq M_{23} = m_2 + m_3 \leqq J_{23}$$

を満たす m_1, m_2, m_3, M_{12}, M_{23} について行う．この結果は一見 M によるようであるが，実は M に無関係であることは前に証明した通りである．

既約表現の積

$$\mathbf{D}(\alpha) \times \mathbf{D}(\beta) = \sum \mathbf{D}(\gamma)$$

に対し，

$$\alpha + \beta \geqq \gamma \geqq |\alpha - \beta| \qquad (16.13)$$

の関係が満たされる．この関係を (α, β, γ) に対する‘三角条件’と呼ぶことは既に記した．そこで W の自変数を一般に a, b, c, d, e, f と記すと，

$$W(a, b, c, d; e, f) \qquad (16.14)$$

については，

$$(a, b, e),\ (b, d, f),\ (a, f, c),\ (d, e, c)$$

が三角条件を満たしていなければならない．

Racah 係数 $W(abcd;ef)$ の自変数の交換に対して次の対称性の成立つことが，定義の式 (16.12) と，Clebsch-Gordan 係数に関する関係 (15.38) とから証明される．

$$W(abcd;ef)=W(badc;ef)=W(acbd;fe)$$
$$=(-)^{e+f-a-d}W(ebcf;ad)=(-)^{e+f-b-c}W(aefd;bc). \qquad (16.15)$$

なお、変換 (16.7) がユニタリ，といってもここでは実数ばかり現われているから直交変換であることから,

$$\sum_{\beta} S(\beta,\alpha)S(\beta,\alpha')=\delta_{\alpha\alpha'},$$

$$\sum_{\alpha} S(\beta,\alpha)S(\beta',\alpha)=\delta_{\beta\beta'},$$

即ち

$$\sum_{f}(2f+1)W(abcd;ef)W(abcd;e'f)=\delta(ee')/(2e+1),$$
$$\sum_{e}(2e+1)W(abcd;ef)W(abcd;ef')=\delta(ff')/(2f+1) \qquad (16.16)$$

の関係が成立つ．これに前の対称性を入れると，多くの似よった直交関係が得られる．

ついでに 4 個の既約表現の積についても書き加えておこう．

$$\mathbf{D}(j_1)\times\mathbf{D}(j_2)\times\mathbf{D}(j_3)\times\mathbf{D}(j_4)=\sum k_J\mathbf{D}(J)$$

の場合，これを

$$\{\mathbf{D}(j_1)\times\mathbf{D}(j_2)\}\times\{\mathbf{D}(j_3)\times\mathbf{D}(j_4)\}$$

として作った基底と

$$\{\mathbf{D}(j_1)\times\mathbf{D}(j_3)\}\times\{\mathbf{D}(j_2)\times\mathbf{D}(j_4)\}$$

として作った基底との間の変換係数を

$$<j_1j_2(J_{12})j_3j_4(J_{34})JM|j_1j_3(J_{13})j_2j_4(J_{24})JM>$$

$$=\sqrt{(2J_{12}+1)(2J_{34}+1)(2J_{13}+1)(2J_{24}+1)}\,U\begin{bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12}\\ j_3 & j_4 & J_{34}\\ J_{13} & J_{24} & J\end{bmatrix} \qquad (16.17)$$

と記したものを有馬・堀江・田辺の U 係数，Fano の X 係数，または Wigner の $9j$ 記号という*．これは

$$U\begin{bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{24} & J \end{bmatrix} = (-)^{\sigma} U \begin{bmatrix} j_2 & j_1 & J_{12} \\ j_4 & j_3 & J_{34} \\ J_{24} & J_{13} & J \end{bmatrix}$$

$$\sigma = j_1 + j_2 + j_3 + j_4 + J_{12} + J_{34} + J_{13} + J_{24} + J \tag{16.18}$$

のような 72 通りの対称性を持ち，Racah 係数により

$$U\begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & e' \\ f & f' & g \end{bmatrix} = (-)^{\sigma} \sum_{\lambda} (2\lambda + 1) \times W(becf\,; a\lambda) W(bf'ce'\,; d\lambda) W(ee'ff'\,; g\lambda) \tag{16.19}$$

のように書き表わされる．(Prog. Theo. Phys. **11** (1954), 405.)

§17. 函数空間における回転群の表現

空間の点 P: (x, y, z) の連続函数 $f(\mathrm{P})$ の集合を考えると，その和および数を掛けたものが，やはり P の連続函数であるから，一つのベクトル空間 $\mathbf{F}$ を作っている．これを**函数空間**と呼ぶ．$\mathbf{F}$ においては二つの‘ベクトル’$f(\mathrm{P})$, $g(\mathrm{P})$ の和が $f(\mathrm{P}) + g(\mathrm{P})$，数 c を掛けたものが $cf(\mathrm{P})$ である．これを有限次元のベクトル空間 $\mathbf{V}_n$ のベクトル成分の和および数を掛けたもの：$f_i + g_i$, cf_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ と比較してみると，P が各基底の番号を示す添字 i に当っていることがわかる．従って $\mathbf{F}$ の次元数は連続無限である．回転 r によって点 P が P$'$ へ移る r: $\mathrm{P} \to \mathrm{P}' = r\mathrm{P}$ として，$f(\mathrm{P})$ に対し，

$$f'(\mathrm{P}') = f(\mathrm{P}) \tag{17.1}$$

により $f'(\mathrm{P})$ を定義すれば，‘変換 $f(\mathrm{P}) \to f'(\mathrm{P})$ は回転群の一つの表現になっている．’ 事実 (17.1) の対応 $f \to f'$ は $f(\mathrm{P}) + g(\mathrm{P})$ に対し $f'(\mathrm{P}') + g'(\mathrm{P}')$, $cf(\mathrm{P})$ に対し $cf'(\mathrm{P}')$ を対応させるから，‘ベクトル’ $f(\mathrm{P})$ の一次変換であ

* これが M に無関係なことは 3 個の積のときと同じ方法で証明される．

る．かつ r: P → P′, s: P′ → P″ とすれば，

$$f''(\mathrm{P}'') = f'(\mathrm{P}') = f(\mathrm{P})$$

であるから，sr: P → P″ に対して $f''(\mathrm{P}'') = f(\mathrm{P})$ となり，表現条件を満足している．このことは (17.1) を

$$f'(\mathrm{P}) = f(r^{-1}\mathrm{P}) \tag{17.2}$$

と書けばなおはっきりする，即ち，

$$f''(\mathrm{P}) = f'(s^{-1}\mathrm{P}) = f(r^{-1}s^{-1}\mathrm{P}) = f((sr)^{-1}\mathrm{P})$$

となり，表現条件を満足していることが明瞭である．この表現を **K** と記し，(17.2) を

$$f'(\mathrm{P}) = \boldsymbol{r}f(\mathrm{P})$$

と書くことにしよう．ここに $\boldsymbol{r}$ は，無限二次元空間 **F** における，回転を表現する一次変換の演算子で，ベクトル空間 $\mathbf{V}_n$ における表現行列 $A(r)$ に相当する．

ベクトル空間 **F** として x, y, z につき連続微分可能な函数の集合をとれば，無限小回転を考えることができる．dt の間の無限小回転により P: (x, y, z) が P′: $(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)$ に移ったとすれば，dx, dy, dz が微小であるとの仮定の下に，x, y, z は r^{-1} により $x-dx$, $y-dy$, $z-dz$ に移るから，(17.2) により，$f(x, y, z)$ は

$$\begin{aligned} f'(x, y, z) &= f(x-dx,\ y-dy,\ z-dz) \\ &= f(x, y, z) - \left\{\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right\} \end{aligned}$$

に変わる．従って無限小回転は

$$\frac{df}{dt} = -\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right\}$$

で表わされる．例えば z 軸のまわりの角速度 1 の無限小回転に対しては，

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x, \quad \frac{dz}{dt} = 0$$

であるから,

$$\frac{df}{dt} = -\left(x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

従って z 軸のまわりの無限小回転は

$$R_z = -\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{17.3}$$

なる演算子で表わされる．これが前に R_3 と記した変換に相当する．同様，x, y 軸のまわりの無限小回転に対して，R_1, R_2 に相当する演算子

$$R_x = -\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{17.4}$$

$$R_y = -\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{17.5}$$

が対応する．これらが (10.11) と同じ交換関係を満たすことは次のようにして確められる：

$$R_xR_yf = \left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$= yz\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial x} - yx\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - z^2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} + zx\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z},$$

$$R_yR_xf = \left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$= zy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} - z^2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - xy\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + xz\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} + x\frac{\partial f}{\partial y}.$$

従って

$$R_xR_y - R_yR_x = -\left(x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}\right) = R_z.$$

他の二つの関係も同様に証明される．

量子力学では，R_x, R_y, R_z の $ih/2\pi$ 倍（h は Planck の定数）が**角運動量 L** の x, y, z 成分を表わす演算子になる．ここでは定因数 $h/2\pi$ を度外視して，

$$iR_x = L_x, \quad iR_y = L_y, \quad iR_z = L_z$$

と置くことにしよう [(12.37) 参照]. それらの間の交換関係は

$$L_yL_z - L_zL_y = iL_x,\quad L_zL_x - L_xL_z = iL_y,\quad L_xL_y - L_yL_x = iL_z \tag{17.6}$$

となる.

極座標 r, θ, φ に移れば, これらの演算子は

$$\left.\begin{aligned} L_z &= -i\frac{\partial}{\partial\varphi}, \\ L_x + iL_y &= e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \\ L_x - iL_y &= e^{-i\varphi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \end{aligned}\right\} \tag{17.7}$$

となる. これから,

$$\begin{aligned}(L_x + iL_y)(L_x - iL_y) &= L_x^2 + L_y^2 - i(L_xL_y - L_yL_x) \\ &= L_x^2 + L_y^2 + L_z \end{aligned} \tag{17.8}$$

の関係を用いて $-\varDelta = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ を計算すれば,

$$\varDelta = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{17.9}$$

となる.

ここに用いた L_x, L_y, L_z と前に用いた演算子 A, B, C との関係は, (10.26) により, [(12.36) 参照]

$$A = L_x - iL_y,\qquad B = -\frac{1}{2}(L_x + iL_y),\qquad C = L_z \tag{17.10}$$

である.

函数空間 $\mathbf{F}$ の部分空間として x, y, z の多項式の空間があり, その中でも同次多項式の集合は回転に対して不変な部分空間 $\mathbf{T}$ を作る. これは丁度 u, v の同次多項式の空間が $\mathbf{SU}_2$ に属する変換に対する不変部分空間を作っていたのと同様である. ただしその場合には各の不変部分空間が $\mathbf{SU}_2$ に対して既約であったが, 今度は x, y, z の l 次の同次多項式の空間 $\mathbf{T}_l$ は $\mathbf{R}$ に対して既約ではない. それは例えば x, y, z の二次の多項式の独立なものは x^2, y^2, z^2, yz,

zx, xy の 6 個があるが，これから $x^2+y^2+z^2$ なる不変な一次結合が作られることからも了解される．そこで l 次同次多項式に対する表現 $\mathbf{D}$ の中から，簡単に求められる既約表現の基底を作ってみよう．

x, y, z を極座標 r, θ, φ により，$x\pm iy=r\sin\theta e^{\pm i\varphi}$, $z=r\cos\theta$ のように書き表わせば x, y, z の l 次同次多項式は $r^l Y_l(\theta, \varphi)$ の形になる．このうち動径 r は回転に対して不変であるから，$r=1$ として記述を簡単化しよう．

回転群の既約表現 $\mathbf{D}_j$ の基底は，§10 に示したように，演算子 $C=L_z$ の固有値 m ($|m|\leqq j$) に対する固有ベクトルにとることができる．よって求める基底 $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ は

$$\frac{1}{i}\frac{\partial Y_{lm}}{\partial\varphi}=mY_{lm}$$

を満足する．したがって

$$Y_{lm}=e^{im\varphi}\Theta_{lm} \tag{17.11}$$

の形でなければならない．ただし Θ_{lm} は θ のみの函数である．ところが x, y, z の l 次同次式の中で，$(x+iy)^l=\sin^l\theta e^{il\varphi}$ が m の最大値 l に対応し，外には $e^{il\varphi}$ の因数を持つものはない．よって

$$\Theta_{ll}=K\sin^l\theta \tag{17.12}$$

で，$\mathbf{D}_l$ が $\mathbf{D}$ に含まれる最大次元数の既約表現であることがわかる．ここに K は未定の定数である．$Y_{ll}=K\sin^l\theta e^{il\varphi}$ が知れれば，これに演算子 $A=L_x-iL_y$ を順次に施して，$m=l-1$, $l-2$, $\cdots\cdots$ に対する基底が作られる．(17.7) によれば，

$$(L_x-iL_y)e^{im\varphi}f(\theta)=e^{i(m-1)\varphi}\left(-\frac{df}{d\theta}-m\frac{\cos\theta}{\sin\theta}f(\theta)\right)$$

$$=e^{i(m-1)\varphi}\frac{1}{\sin^{m-1}\theta}\frac{d}{d\cos\theta}\left\{\sin^m\theta\cdot f(\theta)\right\},$$

$$\left(\frac{d\theta}{d\cos\theta}=-\frac{1}{\sin\theta}\right).$$

これを繰返して,

$$(L_x - iL_y)^k e^{im\varphi} f(\theta)$$
$$= e^{i(m-k)\varphi}\frac{1}{\sin^{m-k}\theta}\frac{d^k}{(d\cos\theta)^k}\left\{\sin^m\theta\cdot f(\theta)\right\} \tag{17.13}$$

を得る. これを $m=l,\ k=l-m,\ f(\theta)=\sin^l\theta$ として適用すれば,

$$Y_{lm} = Ke^{im\varphi}\frac{1}{\sin^m\theta}\frac{d^{l-m}}{(d\cos\theta)^{l-m}}(\sin^{2l}\theta) \tag{17.14}$$

を得る. 特に $m=0$ に対しては

$$Y_{l0} = K\frac{d^l}{(d\cos\theta)^l}(1-\cos^2\theta)^l \tag{17.15}$$

となる. これを Legendre の多項式の理論における Rodrigues の公式:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

と比較して, $K=(-)^l\dfrac{1}{2^l l!}$ と取れば, $Y_{l0}=P_l(\cos\theta)$ としてよいことがわかる. ただし量子力学に対する応用などでは単位球上の積分に対して基底を規準化して置く方が便利であるから*, $P_l(x)$ および $e^{im\varphi}$ に規準因数 $\sqrt{\dfrac{2l+1}{2}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ を乗じて,

$$Y_{l0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}P_l(\cos\theta) \tag{17.16}$$

---

* $\displaystyle\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\overline{Y}_{lm}(\theta,\ \varphi)Y_{l'm'}(\theta,\ \varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$.

単位球上の積分に対して規準化した基底が, 回転群の表現空間におけるユニタリ基底であることは次のようにしてわかる. 回転 r により球面上の点 P が P′ に動いたとすれば, これによる‘ベクトル $f(\mathrm{P})$’の変換は (17.1) で与えられる. よって, $f'(\mathrm{P}) = \boldsymbol{r}f(\mathrm{P})$, $g'(\mathrm{P}) = \boldsymbol{r}g(\mathrm{P})$ に対し,

$$\int\overline{f}(\mathrm{P})g(\mathrm{P})d\Theta = \int\overline{f'}(\mathrm{P}')g'(\mathrm{P}')d\Theta.$$

ところが回転により立体角 $d\Theta$ (単位球上の面積要素 $=\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$) は不変であるから,

$$\int\overline{\boldsymbol{r}f(\mathrm{P})}\boldsymbol{r}g(\mathrm{P})d\Theta = \int\overline{f}(\mathrm{P})g(\mathrm{P})d\Theta.$$

よって Y_{lm} が単位球上の積分に関して基準化されていれば, これは表現 $\mathbf{D}_l$ のユニタリ基底である. 前に記したように, 多項式で表わしたユニタリ基底は, 全体に共通にかかる定数は不定であるが, (17.20) のようにとることにより $\mathbf{F}$ の中に表現される $\mathbf{D}_l$ の基底は確定したものになる.

を取るのが都合がよい．このような基底に対しては，(12.39) により，

$$(L_x - iL_y)Y_{lm} = \sqrt{(l+m)(l-m+1)}\,Y_{l,\,m-1}, \tag{17.17}$$

$$(L_x + iL_y)Y_{lm} = \sqrt{(l-m)(l+m+1)}\,Y_{l,\,m+1} \tag{17.18}$$

となる．$L_x + iL_y$ に対しても，(17.13) と同様の関係

$$(L_x + iL_y)^k e^{im\varphi} f(\theta) = -\,e^{i(m-k)\varphi}\sin^{k+m}\theta \frac{d^k}{(d\cos\theta)^k}\left\{\frac{f(\theta)}{\sin^m\theta}\right\} \tag{17.19}$$

が成立つことが容易に証明されるから，(17.7) を用いて Y_{l0} から m の正負に対するものを求めれば，$m > 0$ として，

$$\left.\begin{aligned} Y_{lm} &= (-)^m e^{im\varphi}\sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}}\sin^m\theta\frac{d^m}{(d\cos\theta)^m}P_l(\cos\theta), \\ Y_{l,\,-m} &= \quad e^{-im\varphi}\sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}}\sin^m\theta\frac{d^m}{(d\cos\theta)^m}P_l(\cos\theta) \end{aligned}\right\} \tag{17.20}$$

が得られる．これら $(2l+1)$ 個の函数を基底としている $\mathbf{D}_l$ の表現空間に属する x, y, z の l 次の同次多項式を **l 次球函数**と称する．

(17.17), (17.18) から，

$$\begin{aligned} &(L_x + iL_y)(L_x - iL_y)Y_{lm} \\ &= (L_x + iL_y)\sqrt{(l-m+1)(l+m)}\,Y_{l,\,m-1} \\ &= (l+m)(l-m+1)Y_{lm} = \{l(l+1) - m(m-1)\}Y_{lm} \end{aligned}$$

なることが知れるから，これと

$$L_z Y_{lm} = mY_{lm}$$

とから，(17.8) の関係により，

$$(L_x^2 + L_y^2 + L_z^2)Y_{lm} = l(l+1)Y_{lm} \tag{17.21}$$

なること，即ちここに得られた基底が演算子 $L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ の固有値 $l(l+1)$ に対する固有函数であることが知れる．

応用数学においてしばしば現われる Laplace の方程式

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

を極座標に変換したものは，よく知れたように，(17.10) を用いて，

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\mathit{\Delta} u = 0 \qquad (17.22)$$

と表わされる．u を x, y, z の l 次同次多項式として，$u = r^l Y_l(\theta, \varphi)$ とおけば，これは

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) = l(l+1)\frac{u}{r^2}$$

となる．そこで Y_l を l 次の球函数とすれば，$\mathit{\Delta} u = -l(l+1)u$ で，丁度 $\Delta u = 0$ となる．即ち球函数は $\Delta u = 0$ の解である．歴史的には球函数の理論は Laplace の方程式を極座標で解く問題から出発しているが，ここに述べたように，回転群との関係からこれを定義した方がむしろ或る意味で自然で，よくその面目を示している．

三つの変数 x, y, z の l 次同次多項式

$$u = \sum a_{\lambda\mu\nu} x^\lambda y^\mu z^\nu \qquad (\lambda + \mu + \nu = l)$$

の係数 $a_{\lambda\mu\nu}$ の数，即ち l 次同次多項式の空間の次元数は $(l+1)(l+2)/2$ である．これは次のようにしてわかる．$\lambda + \mu + \nu = l$ であるから，λ, μ をきめれば，ν はきまってしまう．λ をきめれば μ は 0 から $l-\lambda$ までの $l-\lambda+1$ 個の整数値をとる．λ は 0 から l までの値をとるから，求める数は

$$\sum_{\lambda=0}^{l}(l-\lambda+1) = (l+1)^2 - \sum_{\lambda=0}^{l}\lambda = (l+1)^2 - \frac{l(l+1)}{2}$$
$$= \frac{(l+1)(l+2)}{2}$$

である．Δu は u を x, y または z につき二度微分したものの和であるから $l-2$ 次の同次多項式である．従ってこれを恒等的に 0 と置いたものは $a_{\lambda\mu\nu}$ の間の $(l-1)l/2$ だけの独立な関係を与える．よって $a_{\lambda\mu\nu}$ の独立なものの数は

$$\frac{(l+1)(l+2)}{2} - \frac{l(l-1)}{2} = 2l+1$$

となり，丁度前に求めた $\mathbf{D}_l$ の基底である $2l+1$ 個の球函数 Y_{lm} の数と一致

する．即ち $\Delta u=0$ の解空間 $\mathbf{P}_l$ と $\mathbf{D}_l$ の表現空間 $\mathbf{V}_{2l+1}$ とは全く一致する．

回転群を $\mathbf{R}'$ に拡張すれば，l 次同次式は反転：$x\to -x,\ y\to -y,\ z\to -z$ に対し $(-1)^l$ が掛かるから，表現 $\mathbf{D}_l$ は l が偶数か奇数かに応じて，それぞれ偶表現および奇表現である．

球面上の任意の連続函数 $f(\mathrm{P})$ に対して球函数が完備性を有すること，即ち $f(\mathrm{P})$ が一義的に球函数に分解されること：

$$\int |f(\mathrm{P})|^2 d\Theta=\sum_{lm}\left|\int \overline{Y}_{lm}(\mathrm{P})f(\mathrm{P})d\Theta\right|^2 \qquad (d\Theta\ \text{は立体角要素})$$

は表現 $\mathbf{K}$ を簡約すれば，各の $\mathbf{D}_l$ が各一回ずつ現われることを意味する．これを広義回転群 $\mathbf{R}'$ に拡張すれば，

$$\mathbf{K}=\mathbf{D}_0^{+}+\mathbf{D}_1^{-}+\mathbf{D}_2^{+}+\cdots\cdot \tag{17.23}$$

となる．

特に前に述べた x, y, z につき l 次同次多項式の集合 $\mathbf{T}_l$ の空間における表現は，l が偶数か奇数かにより，それぞれ偶表現，奇表現である．そして，それに含まれる最大次元数の既約表現の次元数が $2l+1$ であるから，$\mathbf{T}_l$ における表現を簡約すれば

$$\mathbf{D}_l+\mathbf{D}_{l-2}+\cdots\cdot+\begin{cases}\mathbf{D}_0 & (l\ \text{偶数})\\ \mathbf{D}_1 & (l\ \text{奇数})\end{cases}$$

である．このことは次のようにも書かれる：

$$P_l(x,\ y,\ z)=\sum_p r^{2p}f_{l-2p}(x,\ y,\ z),$$

ただし P_l は $x,\ y,\ z$ の l 次同次多項式，f_{l-2p} は $l-2p$ 次の球函数である*.

各の既約表現空間 $\mathbf{V}_{2l+1}$ においては，変換 $f'=rf$ は

$$Y'_{lm}=\sum_{m'} Y_{lm'}\,D^l{}_{m'm}(r) \tag{17.24}$$

* 同様の考察により，等方振動子の第 n エネルギー状態（その固有函数は，回転に対し不変な部分を除き，次数の和が n であるような3個のエルミート多項式の積 $H_\alpha(x)H_\beta(y)H_\gamma(z)$ $(\alpha+\beta+\gamma=n)$ で表わされる）が，$j=n,\ n-2,\ n-4,\cdots\cdot$ の回転に対する既約状態に分れることがわかる．

なる（基底の間の）ユニタリ変換で表わされる．回転 r によって (θ_0, φ_0) の方向が (θ, φ) に移されるとすれば，(17.1) により $Y'_{lm}(\theta, \varphi) = Y_{lm}(\theta_0, \varphi_0)$．よって，次の関係を得る：

$$Y_{lm}(\theta_0, \varphi_0) = \sum_{m'} Y_{lm'}(\theta, \varphi) D^l{}_{m'm}(r). \tag{17.25}$$

ついでに，積表現 $\mathbf{D}_l \times \mathbf{D}_{l'}$ の基底 $Y_{lm}, Y_{l'm'}$ と，これを簡約した表現 $\mathbf{D}_L$ $(l+l' \geqq L \geqq |l-l'|)$ の基底 Y_{LM} との間の変換式を求めておこう．この変換はそのままではユニタリでないから，Y_{LM} に適当な数 $A(ll'L)$ を掛けて [(15.23) 参照]

$$A(ll'L)\, Y_{LM} = \sum_{mm'} (mm'|LM)\, Y_{lm} Y_{l'm'}. \tag{17.26}$$

$A(ll'L)$ は $m, m', M(=m+m')$ には無関係であるから，$M=0$ とし，かつ $\theta = 0$ $(P_l(0)=1)$ に対して，

$$Y_{l0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}, \qquad Y_{lm} = 0 \quad (m \neq 0)$$

であることを考慮して，

$$A(ll'L) = \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}}(00|L0)\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{2l'+1}{4\pi}}. \tag{17.27}$$

(17.26) に $(\mu\mu'|LM)$ を掛けて，直交関係 (15.25) を用いれば，(μ, μ' の代りに再び m, m' と記して)

$$Y_{lm}(\theta,\varphi)\, Y_{l'm'}(\theta,\varphi) = \sum_{L,M} \sqrt{\frac{(2l+1)(2l'+1)}{4\pi(2L+1)}}(00|L0)(mm'|LM)\, Y_{LM}(\theta,\varphi) \tag{17.28}$$

の関係が得られる．ただし $M = m + m'$ はきまっているから，M についての和は実は不要である．これから積 $Y_{lm} Y_{l'm'} Y_{L,\,m+m'}$ の単位球上での積分の値が直ちに求められる．

§18. テンソル算

前節に函数空間 $\mathbf{F}$ における回転群の表現に関して記したが，量子力学に対

する応用を考えると，これを更に一般化して，‘Hilbert 空間’における表現を考えることが必要になる．ユニタリ・ベクトル空間 $\mathbf{V}_n$ の次元数を，適当な収束条件の下に，可算或いは連続無限に拡張したものが Hilbert 空間 $\mathbf{H}$ で，函数空間 $\mathbf{F}$ もその一つの例である．多粒子系の量子力学で問題になる Hilbert 空間は，函数空間 $\mathbf{F}$ 並びにスピン空間 $\mathbf{V}_{1/2}$ の有限個の積空間 $\mathbf{H}=\mathbf{F}\times\mathbf{F}\times\cdots\cdots\times\mathbf{F}\times\mathbf{V}_{1/2}\times\mathbf{V}_{1/2}\times\cdots\cdots\times\mathbf{V}_{1/2}$ である．この空間で回転群の表現を論ずる際には，その有限次元の部分空間につき考えれば足りることが多いから，Hilbert 空間に関する一般の記述はここでは省略しよう．

量子力学では，N 個の粒子よりなる系の‘状態’は，Hilbert 空間 $\mathbf{H}$ の元 ψ で表わされる．ψ を‘状態ベクトル’と呼ぶ．ψ は座標系の回転 r によつて $r\psi$ に変わる．この変化は，$\mathbf{F}$ および $\mathbf{V}_{1/2}$ におけるベクトルについては前節までのところで定義されているから，ψ についてもその意味がはっきりしている．かつ $\psi\rightarrow r\psi$ が回転群の表現になっていることも明かである．

ところで，我々が一つの特別な座標系 K を選んで，空間の点の位置を記述するのは，数学的表現の便宜のためであるから，座標系 K から他の座標系 K′ へ回転 r によって移ったために，物理的な状態が‘本質的に’違ったものになっては困る．そのためには，Hilbert 空間を規定する基本量である内積* が，回転によって不変であることが要求される．即ち，回転 r によって，二つのベクトル φ, ψ が $r\varphi$, $r\psi$ に変じたとき

$$(r\varphi, r\psi)=(\varphi, \psi) \tag{18.1}$$

でなければならない．特に $\varphi=\psi$ とすれば，(18.1) は $(\psi, \psi)=\|\psi\|^2$ が回転により不変**，即ち‘変換 $\psi\rightarrow r\psi$ がユニタリ表現である’ことを意味する．

---

* 函数空間における内積は $(\varphi, \psi)=\int\overline{\varphi}(\mathrm{P})\psi(\mathrm{P})dV$ で定義される．

** 函数の絶対値 $|\psi(x, y, z)|$ と区別するため，状態ベクトルの大きさ $\sqrt{(\psi, \psi)}$ を $\|\psi\|$ と記す．

この表現を既約成分に分解し，$\mathbf{D}(j_1)$, $\mathbf{D}(j_2)$ に対する基底をそれぞれ $\varphi(j_1m_1)$, $\psi(j_2m_2)(-j_1 \leqq m_1 \leqq j_1,\ -j_2 \leqq m_2 \leqq j_2)$ とすれば，(18.1) により，

$$
\begin{aligned}
&(\varphi(j_1m_1),\ \psi(j_2m_2)) \\
&= \left(\sum_{\mu_1} \varphi(j_1\mu_1)D(j_1,\ \mu_1m_1\,;r),\ \sum_{\mu_2} \psi(j_2\mu_2)D(j_2,\mu_2m_2\,;r)\right)
\end{aligned}
$$

である．内積に関する定理

$$
\left(\sum_r a_r\varphi_r,\ \sum_s b_r\psi_s\right) = \sum_{r,s} \bar{a}_r b_s(\varphi_r,\ \psi_s)
$$

により，右辺は

$$
\sum_{\mu_1\mu_2} (\varphi(j_1\mu_1),\ \psi(j_2\mu_2))\overline{D}(j_1,\ \mu_1m_1\,;r)D(j_2,\ \mu_2m_2\,;r)
$$

と書き直される．この式の最後の $\bar{D}$, D の積を r につき積分して，パラメタ空間 $\mathbf{S}$ についての平均値を作れば，表現行列成分の直交性 (15.7), (15.8) により，次のことがわかる：

$j_2 \neq j_1$ ならば，
$$
(\varphi(j_1m_1),\ \psi(j_2m_2)) = 0, \tag{18.2}
$$

$j_2 = j_1 = j$ ならば，

$$
\begin{aligned}
(\varphi(jm_1),\ \psi(jm_2)) &= \sum_{\mu_1\mu_2} \frac{\delta(\mu_1\mu_2)\delta(m_1m_2)}{2j+1}(\varphi(j\mu_1),\ \psi(j\mu_2)) \\
&= \frac{\delta(m_1m_2)}{2j+1}\sum_{\mu} (\varphi(j\mu),\ \psi(j\mu)).
\end{aligned} \tag{18.3}
$$

よって‘基底 $\psi(jm)$ は j および m の両方について直交性を持つ.’

H における一般の表現を簡約したとき，同値の既約表現 $\mathbf{D}(j)$ が何回も現われるのが普通である．これらを区別するためには，更にいくつかの数の組が必要である．一電子問題，例えば水素原子の定常状態に対する主量子数 n, 或いは §16 の J_{12} または J_{23} のようなのがその例である．これらをまとめて α と記し，α により区別された各の $\mathbf{D}(j)$ の基底を $\psi(\alpha jm)$ と書くことにしよう．そしてこの α は，前に挙げた例の場合と同様に，

$\alpha' \neq \alpha$ ならば，　$(\psi(\alpha jm), \psi(\alpha' jm)) = 0$ (18.4)

を満足するようにとられているとする．$\alpha' = \alpha$ に対しては，

$$\|\psi(\alpha jm)\|^2 = (\psi(\alpha jm), \psi(\alpha jm))$$

は，(18.3) の右辺が μ の可能な値全部につき加えられていて，'m に無関係' であるから，適当な因数 $N(\alpha j)$ を掛けて，これを '規準化' することができる．そうすれば，一般に，

$$(\psi(\alpha jm), \psi(\alpha' j' m')) = \delta(\alpha\alpha')\delta(jj')\delta(mm') \tag{18.5}$$

となり，$\psi(\alpha jm)$ は **H** における 'ユニタリ基底' を作っている．

一方量子力学によれば，諸種の物理的の '量'，エネルギー，角運動量，…… は，状態ベクトル ψ に作用する，一次自己随伴 '演算子' によって表わされる*．これらの量は，座標の回転に対し，一定の既約な変換則を持った幾つかの成分より成る．例えば，運動エネルギーはスカラー，角運動量，電気双極能率はベクトル，電気四極能率は跡なしの対称テンソル**といった具合である．これらは，回転群の 1, 3, 5 次元既約表現空間におけるベクトルと考えられる．しかし，その成分の変換則は，表現空間のベクトル成分に対するものとは多少異なっている．例えば三次元ベクトルの変換は，基底の変換 $\mathbf{e}_j' = \sum_k \mathbf{e}_k a_{kj}$ と反傾

$$x_j' = \sum_k a^{-1}{}_{jk} x_k$$

であることは §13 に注意したとおりである．これを一般化して．回転 r に対して

$$T_q{}^{k\prime} = \sum_{q'=-k}^{k} (D_{qq'}{}^k(r))^{-1} T_{q'}{}^k \tag{18.6}$$

によって変換される $2q+1$ 個の成分 $T_q{}^k (q = k,\ k-1,\ \cdots,\ -k)$ より成る量 $T^{(k)}$ が，一般の物理量を表わすと考えるのが自然である．

---

* 一次自己随伴演算子とは，$\mathbf{V}_n$ における Hermite 演算子を **H** に拡張したものである．

** $A_{ki} = A_{ik}$ $(i,\ k = 1,\ 2,\ 3)$ で $\mathrm{Sp}(A) = A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0$ なるテンソル．

我々の場合は，ユニタリ表現だけを考えているから，(18.6) はまた

$$T_{q'}{}^{k} = \sum_{q'} T_{q'}{}^{k} \overline{D}^{k}{}_{q'q}(r) \tag{18.7}$$

と書いてもよい．この物理量の成分の定義は，Wigner の書物に用いられているもので，群論的に考えて至極当り前と思われるが，今日普通用いられるのは

$$T_{q}{}^{k\prime} = \sum_{q'} T_{q'}{}^{k} D_{q'q}{}^{k}(r), \tag{18.8}$$

即ち表現の基底と同じに変換されるものが採られている．これは成分として前の定義の共軛複素数を用いることに当る．従って，例えば (12.20) の関係に対応して，T_x, T_y, T_z を普通のベクトル成分として，

$$T_1{}^1 = -(T_x + iT_y)/\sqrt{2}, \quad T_0{}^1 = T_z, \quad T_{-1}{}^1 = (T_x - iT_y)/\sqrt{2} \tag{18.9}$$

が‘1階テンソル’即ちベクトルの成分となる*．(18.8) に従って変換される成分より成る量 $T^{(k)}$ を回転群に対する‘k 階既約テンソル’と称する．この場合 k は整数に限る．

$T_q{}^k$ は演算子で，これを ψ に作用させれば

$$\psi' = T_q{}^k \psi$$

となる．ψ' の無限小回転による変化 $d\psi'/dt$ は

$$\frac{d(T_q{}^k\psi)}{dt} = \frac{dT_q{}^k}{dt}\psi + T_q{}^k\frac{d\psi}{dt}$$

であるから，(12.39) により，x, y, z 軸のまわりの無限小回転に対応して，

$$(J_x \pm iJ_y)T_q{}^k\psi - T_q{}^k(J_x \pm iJ_y)\psi = \sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)}\,T_{q\pm1}{}^k\psi,$$

$$J_z T_q{}^k\psi - T_q{}^k J_z\psi = qT_q{}^k\psi$$

を得る．そこで，$AB - BA = [A, B]$ の‘交換子記号’を用いれば，演算子の間の関係として，

$$[J_x \pm iJ_y, T_q{}^k] = \sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)}\,T_{q\pm1}{}^k, \tag{18.10}$$

---

*　2 が $\sqrt{2}$ になったのはユニタリ化したためである．

$$[J_z, T_q{}^k] = qT_q{}^k \tag{18.11}$$

が成立つ．Condon–Shortley, Racah 等は，この二つの関係をもとにしてテンソル算を建設している．

量子力学では状態 $\psi(\alpha'j'm')$ から $\psi(\alpha jm)$ へ移る際の量 $T_q{}^k$ の行列成分

$$(\psi(\alpha jm), T_q{}^k\psi(\alpha'j'm')) = (\alpha jm|T_q{}^k|\alpha'j'm') \tag{18.12}$$

を求めることが重要な問題になる．特にその対角成分は状態 $\psi(\alpha jm)$ における $T_q{}^k$ の平均値を与える．

$$T_q{}^k\psi(\alpha'j'm')$$

は，回転に際しては $\psi(k,q)\psi(j'm')$ と同様の変換をなすから，これを既約成分に分ければ，

$$\mathbf{D}(k) \times \mathbf{D}(j') = \sum \mathbf{D}(J), \quad k + j' \geqq J \geqq |k - j'| \tag{18.13}$$

によって定まる $\mathbf{D}(J)$ の基底 $\psi(J,M)$ と同様に変換されるものの和として書き表わすことができる．よって，直交関係 (18.2) により，‘$T_q{}^k$ の行列成分 (18.12) は，$(j'kj)$ が三角条件を満足しないときには，0 である.’ これが $T^{(k)}$ に対する‘選択則’を与える．従って一般には，j, j' の差 $\Delta j = j - j'$ に対し，

$$\Delta j = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots,\ \pm k \tag{18.14}$$

が $T^{(k)}$ に対する‘選択則’であるが，$j + j' < k$ に対するものは‘禁止’される．例えば四重極能率に対する選択則は一般に $\Delta j = 0,\ \pm 1,\ \pm 2$ であるが，(0, 0)，(1/2, 1/2)，(0, 1)，(1, 0) の (j, j') の組みは禁止される．なお分解 (18.13) において，

$$m = q + m'$$

であるから，m に対する選択則

$$\Delta m = m - m' = q \quad (q = 0,\ \pm 1,\ \cdots,\ \pm k) \tag{18.15}$$

が得られる．

0でない行列成分を求めることは,(18.3)の計算と同様に行われる((18.3)は $T_q^k=1$ の場合に当る). 即ち

$$(\psi(\alpha jm),\ T_q^k\psi(\alpha' j'm'))$$

$$=\sum_{\mu q'\mu'}(\psi(\alpha j\mu),\ T_{q'}^k\psi(\alpha' j'\mu'))\overline{D}(j,\ \mu m;r)D(k,\ q'q;r)D(j',\ \mu'm';r)$$

に (15.27):

$$D(k,\ q'q;r)D(j',\ \mu'm';r)$$

$$=\sum_{JMM'}(kq'j'\mu'|kj'JM)(kqj'm'|kj'JM')D(J,\ MM';r)$$

を代入し, パラメタ空間において平均値をとれば, 直交関係により $J=j$, $M=\mu$, $M'=m$ 以外のものは 0 となり, (15.37) を用いて,

$$(\alpha jm|T_q^k|\alpha' j'm')$$

$$=\frac{1}{2j+1}(j'm'kq|j'kjm)\sum_{\mu q'\mu'}(j'\mu'kq'|j'kj\mu)(\alpha j\mu|T_{q'}^k|\alpha j'\mu') \tag{18.16}$$

を得る. この最後の和は m, m' の値に無関係である. 普通の記法と一致させるために, この値に $\sqrt{2j+1}$ を掛けたものを $(\alpha j\|T^{(k)}\|\alpha' j')$ と記すことにすれば, ‘k 階テンソルの成分の行列成分は

$$(\alpha jm|T_q^k|\alpha' j'm')=\frac{1}{\sqrt{2j+1}}(\alpha j\|T^{(k)}\|\alpha' j')(j'm'kq|j'kjm) \tag{18.17}$$

で与えられる.’ この中 Clebsch–Gordan 係数は, $T^{(k)}$ が k 階テンソルであることだけから純粋群論的に定まる部分, $(\alpha j\|T^{(k)}\|\alpha' j')$ は, 量 $T^{(k)}$ の具体的の性質による部分で, Racah はこれらをそれぞれ‘幾何学的部分’,‘物理学的部分’と呼んでいる. (18.17) は, 色々の転移に対する‘強度則’を与える最も一般な公式である.

物理的部分を求める一つの例として, 角運動量 $\mathbf{J}$ について考えてみよう. 既約テンソル成分は $J_1^1=-(J_x+iJ_y)/\sqrt{2}$, $J_0^1=J_z$, $J_{-1}^1=(J_x-iJ_y)/\sqrt{2}$

であるが，$(\alpha j\|J\|\alpha' j')$ はこれらのどの成分について求めてもよいから，$J_0=J_z$ について計算すると，

$$(jm|J_z|j'm')=(\psi(jm), J_z\psi(j'm'))=m'(\psi(jm), \psi(j'm'))$$
$$=m'\delta(j,j')\delta(m,m').$$

一方 (18.17) によれば，これは

$$\frac{1}{\sqrt{2j+1}}(jm10|j1jm)(j\|J\|j)$$

に等しい．これに Clebsch–Gordan 係数の値を入れると，

$$\frac{m}{\sqrt{(2j+1)j(j+1)}}(j\|J\|j)$$

となる．よって，

$$(j\|J\|j)=\sqrt{(2j+1)j(j+1)} \tag{18.18}$$

である．

次に二つの‘テンソルの積’について考えよう．スピン軌道相互作用 $\xi(r)\,\mathbf{l}\cdot\mathbf{s}=\xi(r)(l_xs_x+l_ys_y+l_zs_z)$ を例にとって考えると，この場合一電子問題の Hilbert 空間は $\mathbf{H}=\mathbf{F}\times\mathbf{V}_{1/2}$ で，$\mathbf{l}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}=-i\mathbf{r}\times\mathrm{grad}$ は空間 $\mathbf{F}$ に，$\mathbf{s}$ はスピン空間 $\mathbf{V}_{1/2}$ に作用する演算子である．(18.9) により，

$$\mathbf{l}\cdot\mathbf{s}=\frac{1}{2}(l_x-il_y)(s_x+is_y)+\frac{1}{2}(l_x+il_y)(s_x-is_y)+l_zs_z$$

と書いてみると，このスカラー積は

$$\mathbf{l}\cdot\mathbf{s}=\sum_{q=1}^{-1}(-)^q l_q{}^1 s_{-q}{}^1 \tag{18.19}$$

の形に表わされる．

このようなスカラー積は，二電子間の Coulomb 相互作用 $1/r_{12}$，$r_{12}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$ において，各電子の座標 x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 を極座標 r_1, θ_1, φ_1; r_2, θ_2, φ_2 で表わしたものにも現われる．(θ_1, φ_1), (θ_2, φ_2) の間の角を ω とすれば，Legendre 多項式に関するよく知れた式により，

$$\frac{1}{r_{12}} = \frac{1}{\sqrt{r_1{}^2 + r_2{}^2 - 2r_1r_2\cos\omega}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_<{}^k}{r_>{}^{k+1}} P_k(\cos\omega)$$

である．ここに $r_<$, $r_>$ はそれぞれ r_1, r_2 の中の小さい方，大きい方を表わす．$Y_{lm}(\theta, \varphi)$ を §17 に与えた規準化された球函数とすれば，球函数の加法定理*により，

$$P_k(\cos\omega) = \frac{4\pi}{2k+1} \sum_{q=k}^{-k} (-)^q Y_{kq}(\theta_1, \varphi_1) Y_{k-q}(\theta_2, \varphi_2) \tag{18.20}$$

も (18.19) と同じ形をしている．ω は回転により不変だから，これはスカラー量で，$Y_{kq}(\theta, \varphi)$ が $\mathsf{D}(k)$ のユニタリ基底を作っていることは既に記した**.

このように，$T^{(k)}$, $U^{(k)}$ が二つの k 階テンソルで，それぞれ Hilbert 空間 $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_2$ の $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ に属するベクトルにだけ作用するとき，そのスカラー積

$$T^{(k)} \cdot U^{(k)} = \sum_q (-)^q T_q{}^k U_{-q}{}^k \tag{18.21}$$

の $(\alpha jm, \alpha' j' m')$ 成分を求めてみよう．スカラーに対する選択則から，$j' = j$, $m' = m$ 以外の行列成分は 0 であるから，必要なのは

$$(\alpha jm | T^{(k)} \cdot U^{(k)} | \alpha' jm) = \sum_{q=k}^{-k} (-)^q (\alpha jm | T_q{}^k U_{-q}{}^k | \alpha' jm) \tag{18.22}$$

である．$\psi(\alpha jm)$, $\psi(\alpha' jm)$ が $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ における基底の積 $\psi(\alpha_1 j_1 m_1) \cdot \psi(\alpha_2 j_2 m_2)$; $\psi(\alpha_1' j_1' m_1')\psi(\alpha_2' j_2' m_2')$ の一次結合として作られるとして，

$$\psi(\alpha jm) = \sum_{m_1, m_2} \psi(\alpha_1 j_1 m_1) \psi(\alpha_2 j_2 m_2)(j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 jm)$$

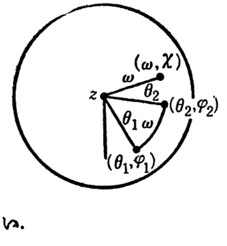
---

* z 軸のまわりの角 φ_2, y 軸のまわりの角 θ_2 の回転により，z 軸が (θ_2, φ_2) に移るとき，(ω, χ) の方向が (θ_1, φ_1) に移ったとすれば，(17.25), (12.52) により，

$$Y_{l0}(\cos\omega) = \sum_m (-)^m \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{l-m}(\theta_2, \varphi_2) Y_{lm}(\theta_1, \varphi_1).$$

よって，(17.16) により，

$$P_l(\cos\omega) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_m (-)^m Y_{lm}(\theta_1, \varphi_1) Y_{l-m}(\theta_2, \varphi_2).$$



** この場合は，ベクトルの成分の場合のような疑義は起らない．

等の関係を代入すれば，上式は

$$\sum_q (-)^q (j_1m_1j_2m_2|j_1j_2jm)(j_1'm_1'j_2'm_2'|j_1'j_2'j'm')$$
$$\cdot(\alpha_1j_1m_1|T_q^k|\alpha_1'j_1'm_1')(\alpha_2j_2m_2|U_{-q}^k|\alpha_2'j_2'm_2')$$
$$=\frac{1}{\sqrt{(2j_1+1)(2j_2+1)}}(\alpha_1j_1\|T^{(k)}\|\alpha_1'j_1')(\alpha_2j_2\|U^{(k)}\|\alpha_2'j_2')$$
$$\cdot\sum_{qm_1m_2m_1'm_2'}(j_1m_1j_2m_2|j_1j_2jm)(j_1'm_1'kq|j_1'kj_1m)(j_1'm_1'j_2'm_2'|j_1'j_2'j'm')$$
$$\cdot(j_2'm_2'k-q|j_2'kj_2m_2)$$

((18.17) による)．これに (15.38) の関係

$$(j_2'm_2'k-q|j_2'kj_2m_2)=(-)^{k-q}\sqrt{\frac{2j_2+1}{2j_2'+1}}(kqj_2m_2|kj_2j_2'm_2')$$

を入れれば，(16.12) により $\sum$ の部分は Racah 係数 $W(j_1'kjj_2;j_1j_2')$ で表わされて，これを対称関係 (16.15) により変形すれば，

$$(\alpha_1\alpha_2j_1j_2jm|T^{(k)}\cdot U^{(k)}|\alpha_1'\alpha_2'j_1'j_2'jm)$$
$$=(-)^{j_1+j_2'-j}W(j_1j_2j_1'j_2';jk)(\alpha_1j_1\|T^{(k)}\|\alpha_1'j_1')(\alpha_2j_2\|U^{(k)}\|\alpha_2'j_2') \tag{18.23}$$

なる式が得られる．[因数 $(-)^{2(j-m)}$ は j が半整数，従って m も半整数のときにも $+1$ となる．] スカラー積を一般化して，階数の異なる二つのテンソル $T^{(k_1)},U^{(k_2)}$ の積を作る．これらは $\mathbf{D}(k_1),\mathbf{D}(k_2)$ の基底と同じ変換則を持つから，その積は $\mathbf{D}(k_1)\times\mathbf{D}(k_2)=\sum_k\mathbf{D}(k)$ に従って次のように既約テンソルの和に分解される．

$$T_{q_1}^{k_1}U_{q_2}^{k_2}=\sum_k[T^{(k_1)}\times U^{(k_2)}]_q^k(k_1q_1k_2q_2|k_1k_2kq). \tag{18.24}$$

ここに $(k_1,\ k_2,\ k)$ は三角条件を満たす．逆にこれをとけば，上のようにして作った k 階既約テンソルの成分として，

$$[T^{(k_1)}\times U^{(k_2)}]_q^k=\sum_{q_1+q_2=q}T_{q_1}^{k_1}U_{q_2}^{k_2}(k_1q_1k_2q_2|k_1k_2kq) \tag{18.25}$$

を得る．この定義によれば，例えばスカラー積は

$$T^{(k)}\cdot U^{(k)}=\sum(-)^q T_q{}^k T_{-q}{}^k=(-)^k\sqrt{2k+1}\,[T^{(k)}\times U^{(k)}]_0{}^0. \tag{18.26}$$

ベクトル積は

$$[\mathbf{T}\times\mathbf{U}]_q=\frac{\sqrt{2}}{i}[T^{(1)}\times U^{(1)}]_q{}^1\qquad(q=1,0,-1) \tag{18.27}$$

と表わされる．その行列成分は (18.17) の形で，

$$\begin{aligned}&(\alpha j\|[T^{(k_1)}\times T^{(k_2)}]^{(k)}\|\alpha' j')\\&=\sum_{\alpha'' j''}(\alpha j\|T^{(k_1)}\|\alpha'' j'')(\alpha'' j''\|U^{(k_2)}\|\alpha' j')<j'k_2(j'')k_1 j\,|\,j',k_2k_2(k)j>/\sqrt{2j''+1}\end{aligned} \tag{18.28}$$

で与えられる．特に $\mathbf{H}=\mathbf{H}_1\times\mathbf{H}_2$ で，$T^{(k)}$, $U^{(k)}$ がそれぞれ $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ のベクトルにだけ作用するときには

$$\begin{aligned}&(\alpha j_1 j_2 j\|[T^{(k_1)}\times U^{(k_2)}]^{(k)}\|\alpha' j_1' j_2' j')\\&=\sqrt{(2k+1)(2j+1)(2j'+1)}\sum_{\alpha''}(\alpha j_1\|T^{(k_1)}\|\alpha'' j_1')(\alpha'' j_2\|U^{(k_2)}\|\alpha j_2')\\&\qquad\cdot U\begin{bmatrix}j_1 & j_2 & j\\ j_1' & j_2' & j'\\ k_1 & k_2 & k\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{18.29}$$

となる．前のスカラー積は，$k_1=k_2$, $k=0$ の場合として，この一般式に含まれる．また $U^{(k_2)}=U^{(0)}=1$ とすれば $T^{(k)}=T^{(k)}\times U^{(0)}$ であるから，(j_1j_2j) の状態における $T^{(k)}$ の行列成分が知れる：

$$\begin{aligned}&(\alpha j_1 j_2 j\|T^{(k)}\|\alpha j_1' j_2' j')\\&=(-)^{j_1'-j_2-k+j}(\alpha j_1\|T^{(k)}\|\alpha' j_1')\sqrt{(2j+1)(2j'+1)}\,W(j_2jj_2'j';j_1k).\end{aligned} \tag{18.30}$$

Racah 理論については，その一端をここで簡単に紹介したに過ぎない．深く知りたい諸君は，日本物理学会誌 **9** (1954), 79 にある石津武彦・柳川禎章氏の解説，並びにその終りに付けてある文献について学ばれたい．なお本文の記述は堀江久氏の‘素粒子論研究’によせた論文によるところが多い．

補　　註

本書の初版が出てから後，回転群の表現，特に Racah 理論およびその物理学への応用に関する教科書が出版された．その主要なものは

M. E. Rose: Elementary Theory of Angular Momentum, John Wiley, New York (1957)

G. Racah and U. Fano: Irreducible tensorial sets, Academic Press, New York (1959)

A. R. Edmonds: Angular Momentum in Quantum Mechanics, Princeton University Press, Princeton, N. J. (1957)

である．Racah 係数 (6j symbol) の数値表としては

T. Ishizu, H. Horie, S. Obi, M. Sato, Y. Tanabe and Yanagawa: Tables of Racah Coefficients, Pan-Pacific Press, Tokyo (1960)

M. Rotenberg, R. Bivins, N. Metropolis, J. K. Wooten. JR.:
The 3j and 6j Symbols, M. I. T. Press, Cambridge, Mass. (1960)

が今日最も完備したものである．後者は Wigner 係数 (3j symbol) をも含んでいる．これらの表は数値を素数の積の分数の形に表わしているが，次の

A. Simon, J. H. Van der Sluis and L. C. Biedenharn: Tables of the Racah Coefficients, Oak Ridge Natl. Lab. Rept. ORNL-1679 (1954)

は小数で表わしてあって，時に便利なこともある．

U 係数 (9j symbol) に対する表としては

K. M. Howell: Tables of 9j-symbols, University of Southampton Research Report US 59-2 (1959)

K. Smith and J. W. Stevenson: A table of Wigner 9j-coefficients for integral and half-integral values of the parameters, Argonne National Laboratory Report ANL-5776, ANL-5860 I, ANL-5860 II

がある．前者は素数積の分数形，後者は小数で表わしてある．

なお回転群とその表現論を一般の連続群(線型リー群)の理論の一つの例として記述したものに

山内恭彦，杉浦光夫： 連続群論入門 [新数学シリーズ 18, 培風館 (1960)]
がある. その巻末に，連続群のさらに進んだ理論を知りたい人のための文献が挙げてある.

索　　引

ア 行

カ 行

サ 行

タ 行

ナ 行

ハ 行

マ 行

ヤ 行

ラ 行

回転群とその表現

1957年 6 月29日　第 1 刷発行 ©
1980年12月20日　第15刷発行

定価 1700円

著　者　山内恭彦

発行者　緑川　亨

〒101 東京都千代田区一ツ橋 2-5-5
発行所　株式会社 岩波書店
電話 03-265-4111
振替 東京 6-26240

印刷・大日本印刷　製本・三水舎